Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Gimnazjum
Prezent wakacyjny 2014 r.

1. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna liczb 13^{15} i 17^{15} (13^{2n+1} i 17^{2n+1}) jest podzielna przez średnią arytmetyczną liczb 13 i 17.

2. Przez jaką najmniejszą liczbę należy przemnożyć liczbę 2940, żeby otrzymać sześcian pewnej liczby naturalnej?

3. Dla jakich liczb naturalnych n można utworzyć z cyfr 1 i 0 liczbę n-cyfrową podzielną przez 13?

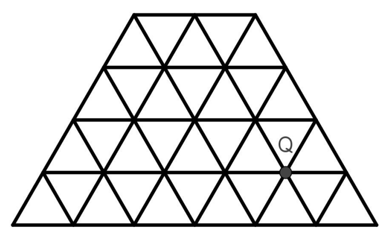
4. Na okręgu o środku O_1 i promieniu r leży środek O_2 okręgu o tym samym promieniu. Okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta a przechodząca przez punkt B przecina okrąg o środku O_2 w punkcie M_1 i okrąg o środku O_1 w punkcie M_2. Prosta przechodząca przez punkty A i M_1 przecina okrąg o środku O_1 w punkcie N_2. Prosta przechodząca przez punkty A i M_2 przecina okrąg o środku O_2 w punkcie N_1. Udowodnij, że czworokąt BN_2AN_1 jest równoległobokiem.

5. Grupę turystów postanowiono rozmieścić w autobusach tak, aby w każdym była taka sama liczba osób. Na początku próbowano umieścić w każdym autobusie po 22 osoby, ale przy tym rozmieszczeniu zabrakło miejsca dla jednego turysty. Gdy zredukowano o 1 liczbę autobusów, udało się rozmieścić wszystkich zgodnie z przyjętą regułą. Ile pierwotnie brano pod uwagę autobusów i ilu było turystów, jeśli w autobusie mieszczą się co najwyżej 32 osoby?

6. Znajdź parę liczb naturalnych o tej własności, że suma dwukrotności pierwszej i trzykrotności drugiej jest równa iloczynowi tych liczb.

7. Na bokach AB i BC równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $ABPQ$ i $BCSR$. Uzasadnij, że odcinki QD i DS są równej długości i prostopadłe do siebie.

8. Sieć utworzoną ze sznura, której szkic pokazano na rysunku, podpalono w punkcie Q. Ogień rozprzestrzenia się ze stałą prędkością: jednostkowy odcinek pali się 1 sekundę, każdy węzeł spala się także w ciągu 1 sekundy. Który punkt sieci spali się jako ostatni? Jak długo będzie się palił ogień?

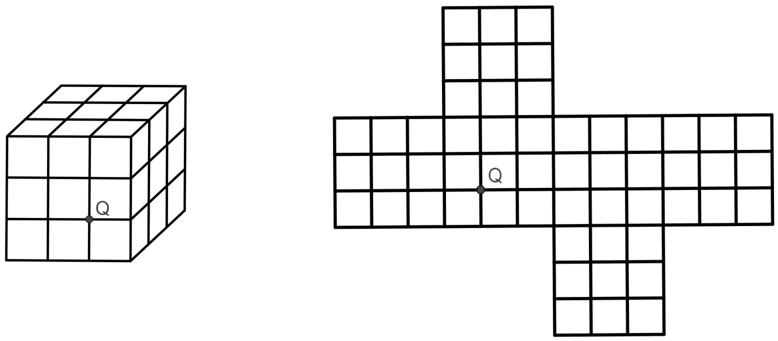


9. Czy istnieją trzy kolejne liczby nieparzyste podzielne odpowiednio przez 27, 25 i 7?

10. Ile najmniej jedynek zawiera zapis liczby 101010...0101, jeśli wiadomo, że liczba ta dzieli się przez 9999?

11. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie E. Wiadomo, że pola trójkątów ABE i CDE są równe, i że przekątna AC jest dwusieczną kąta A. Oblicz długość BC wiedząc, że $AB = 4$.

12. Szklany sześcian opleciono sznurem, jak na rysunku (łącznie z jego krawędziami). W punkcie Q przyłożono ogień. Ogień rozprzestrzenia się ze stałą prędkością: jednostkowy odcinek pali się 1 sekundę, każdy węzeł spala się także w ciągu 1 sekundy. Który punkt sieci spali się jako ostatni? Określ położenie tego punktu na narysowanej siatce. Jak długo będzie się palił ogień?



13. Co zajmie mniej czasu: przejechanie całej drogi rowerem ze stałą prędkością, czy przejechanie $\frac{2}{3}$ drogi motocyklem z prędkością trzy razy większą niż prędkość roweru i pokonanie pozostałej części drogi piechotą z prędkością dwa razy mniejszą niż prędkość roweru?

14. Zbuduj co najmniej dwie liczby takie, że:

- w ich zapisie występują wszystkie cyfry $1, 2, ..., 9$,
- żadna cyfra się nie powtarza,
- po wykreśleniu dowolnych 5 cyfr nigdy nie otrzymamy ani rosnącego ani malejącego ciągu czterech cyfr.

15. Liczby od 1 do 10 podzielono na dwie grupy tak, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był podzielny przez iloczyn liczb z drugiej grupy. Jaki może być najmniejszy iloraz w takim dzieleniu?

16. Rozwiąż rebus $(R + Z + Y + M)^4 = \overline{RZYM}$.

17. Czy istnieje liczba naturalna n, dla której iloczyn tej liczby i sumy jej cyfr jest równy 2015?

18. Czy można do zapisu liczby równej iloczynowi dwóch kolejnych liczb naturalnych dopisać dwie cyfry tak, aby otrzymać kwadrat liczby naturalnej?

19. W liczbie A cyfry tworzą ciąg rosnący. Ile jest równa suma cyfr liczby $9 \cdot A$?

20. Uzasadnić, że zbioru liczb $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots, 15\}$ nie można podzielić na dwa zbiory A i B takie, aby w zbiorze A były dwa elementy zaś w zbiorze B pozostałe elementy oraz aby suma elementów zbioru B była równa iloczynowi elementów zbioru A.

21. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb naturalnych, których największy wspólny dzielnik jest równy 1 i takie, że suma dowolnych dwóch z nich jest podzielna przez trzecią.

Życzymy udanych wakacji!

Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej
w roku szkolnym 2014/2015!