Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe

w dniu 11 stycznia 2014 r.

Tematyka: 1. Pole i obwód koła.

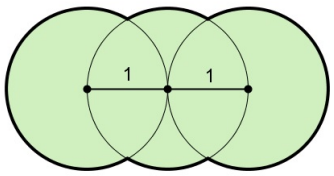
2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.

3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

1. Czy liczba $2013 \cdot \left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{2013^2}\right)$ jest kwadratem liczby naturalnej?

2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$, a następnie zbadaj, czy wartość tego wyrażenia dla $x=\sqrt{3}+1$ i $y=\sqrt{3}-1$ jest liczbą wymierną?

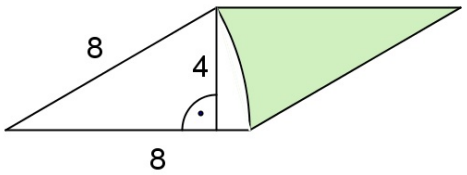
3. Z trzech okręgów o jednakowych promieniach równych 1 dwa są styczne zewnętrznie, a trzeci ma środek w punkcie styczności (rysunek obok). Oblicz pole i obwód otrzymanego w ten sposób obszaru.



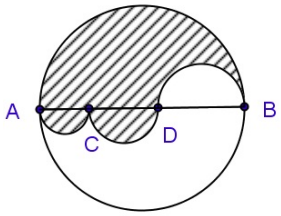
4. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb naturalnych $n,\ m$ różnica kwadratów ich sumy oraz różnicy jest podzielna przez 4.

5. Uzasadnij, że dla każdej liczby x większej od 3 liczba x^3-3x^2-x+3 jest dodatnia.

6. Oblicz pole zacieniowanego fragmentu rombu (rysunek obok).



7. Na średnicy AB koła obrano punkty C i D tak, że $|AC|=6,\ |CD|=8,$ $|DB|=10$. Na każdym z odcinków $AC,\ CD$ i DB zbudowano półkole (patrz rysunek). Porównaj pola i obwody obszarów zacieniowanego i niezacieniowanego w kole.

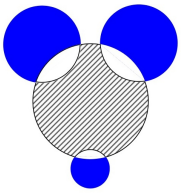


8. Mamy dwa koła o promieniu 2. Środek każdego z tych kół leży na brzegu drugiego. Oblicz obwód i pole części wspólnej tych kół.

9. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$, a następnie wyznacz jego wartość dla $a=\frac{2}{5},\ b=0{,}375$.

10. Która z liczb $3^{100}-2^{150}$ czy $3^{50}+2^{75}$ jest większa?

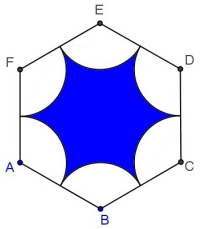
11. Niech P będzie polem obszaru zacieniowanego, a S polem obszaru zakreskowanego (część największego koła). Średnice kół są równe: 6, 4, 4, 2. Uzasadnij, że $P = S$.



12. Uzasadnij, że liczba $3^{16} - 1$ jest podzielna przez 64.

13. Czy liczba $2^{2010} + 15^{20}$ jest liczbą pierwszą?

14. Wielokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym i jego obwód jest równy 36. Każdy wierzchołek sześciokąta jest środkiem okręgu o promieniu równym połowie długości boku. Ile jest równy obwód i pole zacieniowanej figury?



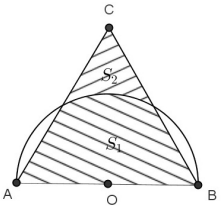
15. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych:

a) $\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \dfrac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\dfrac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^{-1}$, $a = \sqrt{5} - 1$, $b = 1 + \sqrt{5}$,

b) $\left[\left(a + \dfrac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\dfrac{ab}{a+b} - a\right)\right] : \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, $a = -\dfrac{4}{5}$, $b = 0{,}6$,

c) $\left(x + y - \dfrac{4xy}{x+y}\right) : \left(\dfrac{x}{x+y} - \dfrac{y}{y-x} + \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$, $a = 0{,}6$, $b = -0{,}4$.

16. W trójkącie równobocznym o boku długości 6 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 3. Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2.

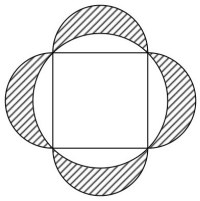


17. Czy liczba: a) $2009 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2009^2}\right)$,

b) $3 \cdot \left(1 + \dfrac{2}{3}\right)\left(1 + \dfrac{2}{5}\right)\left(1 + \dfrac{2}{7}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{2}{2007}\right)$

jest liczbą pierwszą?

18. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu jest równa 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.



Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - *„Liga Zadaniowa”* - zad. 52 - 81 na str. 29 - 31 i zad. 211 - 239 na str. 91 - 95 oraz *„Koło matematyczne w gimnazjum”*.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - *„Koło matematyczne w gimnazjum”* - zadania 591, 585, 595, 565, 118 oraz przykład 10 ze strony 139 i przykład 7 na stronie 18.