

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe

w dniu 22 marca 2014 r.

Tematyka:

1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.
2. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. Środkowe BD i CF trójkąta ABC są prostopadłe oraz $|BD| = 9 \text{ cm}$ i $|CF| = 12 \text{ cm}$. Wyznaczyć:
(a) pole trójkąta ABC , (b) długości boków trójkąta ABC .
2. Obliczyć pole trapezu, w którym długości podstaw są równe 10 cm i 30 cm , a długości przekątnych są równe 24 cm i 32 cm .
3. Oblicz $\sqrt{2009 \cdot 2011 \cdot 2015 \cdot 2017 + 36} + 10$.
4. Środkiem kwadratu jest punkt $(0, 0)$. Jednym z jego wierzchołków jest punkt $(3, 4)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz oblicz obwód i pole kwadratu.
5. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.
6. W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten kąt w stosunku $1 : 2$. Oblicz pole trójkąta jeśli długość tej środkowej wynosi 10 cm .
7. Oblicz: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2011}}\right)$.
8. Oblicz pole trapezu, w którym długości podstaw wynoszą 10 cm i 20 cm , a długości przekątnych są równe 18 cm i 24 cm .
9. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są w stosunku $3:4$, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm . Obliczyć: (a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
(b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie, (c) długości środkowych tego trójkąta.
10. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(1, -1)$, a jednym z wierzchołków jest punkt $(5, -1)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki sześciokąta oraz obliczyć jego obwód i pole.
11. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$.
12. Oblicz: $\sqrt{1 + 2012\sqrt{1 + 2011\sqrt{1 + 2010\sqrt{1 + 2009 \cdot 2007}}}}$.

13. Przekształć wyrażenie $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right)$ do najprostszej postaci i rozstrzygnij, która z liczb $\frac{1}{8}$, czy wartość wyrażenia dla $x = \frac{4}{5}$ jest większa?
14. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają równe długości i wynoszą po 8 cm, a przedłużenia ramion przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód i pole tego trapezu.
15. W trójkącie, którego długości boków wynoszą 16, 12, 20 wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i odległość między środkami tych okręgów.
16. Oblicz pole sześciokąta, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają tę samą miarę, a boki mają kolejno długości 2, 4, 2, 4, 2, 4.
17. Dla dowolnych liczb a i b udowodnij nierówność: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.
18. Wyrażenie: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b}\right) : \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a}\right) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)\right]$, doprowadź do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = 4 + \sqrt{7}$ i $b = \sqrt{7} - 4$.
19. W równoległoboku długości boków wynoszą 5 cm i 6 cm. Oblicz długości przekątnych równoległoboku, wiedząc że symetralna dłuższego boku przechodzi przez wierzchołek równoległoboku.
20. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a , b zachodzi nierówność: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.
21. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$ w podanej kolejności.
22. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.
23. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD . Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , zaś r_1 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_2 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD . Udowodnić, że $r + r_1 + r_2 = |CD|$.
24. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach 2 cm i 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
25. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - „Liga Zadaniowa” - zad. 51 - 87 na str. 74 - 77 i zad. 276 - 310 na str. 101 - 105 oraz „Koło matematyczne w gimnazjum”.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „Koło matematyczne w gimnazjum” - zadania 104, 458, 464, 480, 470, przykład 5 ze strony 17, przykład 10 ze strony 123 i przykład 6 ze strony 136.