Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową w roku szkolnym 2013/14

1. Liczba trzycyfrowa $\overline{abc}$ jest podzielna przez 37. Udowodnić, że liczba $\overline{bca}+\overline{cba}$ jest podzielna przez 37.

2. Dla każdej liczby trzycyfrowej wyznaczamy iloraz tej liczby przez sumę cyfr tej liczby. Ile jest równy największy taki iloraz?

3. Ile jest liczb pierwszych mniejszych niż 10000, dla których suma cyfr jest równa 2?

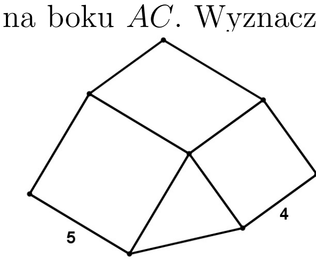
4. Ile jest trójek liczb naturalnych $(a,\ b,\ c)$ takich, że $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ oraz $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ jest liczbą naturalną?

5. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną pięciocyfrową, która jest podzielna przez 1, 2, 3, 4 i 5.

6. Trzy różne liczby naturalne mają następującą własność: każda z nich jest dzielnikiem sumy dwóch pozostałych liczb. Opisz wszystkie takie trójki liczb.

7. Boki trójkąta ABC mają długości $|AC| = 12$ cm, $|CB| = 5$ cm i $|AB| = 13$ cm. W trójkąt wpisano półokrąg styczny do boków AB i BC o środku leżącym na boku AC. Wyznaczyć promień tego półokręgu.

8. Na rysunku mamy dwa kwadraty, których boki mają długości odpowiednio 4 cm i 5 cm, oraz trójkąt o polu 8 cm^2 i równoległobok. Wyznaczyć pole tego równoległoboku.



9. Wyznaczyć wszystkie liczby trzycyfrowe, które są 18 razy większe od sumy swoich cyfr.

10. Suma dwóch liczb jest równa 2, a suma kwadratów tych liczb jest równa 3. Wyznaczyć sumę sześcianów tych liczb oraz sumę czwartych potęg tych liczb.

11. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano jednym z kolorów zielonym lub czarnym. Udowodnić, że można znaleźć takie dwa punkty tej płaszczyzny, które są odległe od siebie o 1 i są tego samego koloru.

12. W trójkącie ostrokątnym kąt między dwiema wysokościami jest równy 60°. Punkt przecięcia tych wysokości dzieli jedną z nich w proporcji 2:1 licząc od wierzchołka. Udowodnić, że trójkąt ten jest równoboczny.

13. Ojciec i jego dwaj synowie (Kuba i Tomek) mają razem 48 lat. Za pięć lat wiek ojca będzie dwa razy większy od sumy lat synów, a Kuba będzie miał tyle lat ile lat obecnie ma Tomek. Ile lat obecnie mają ojciec, Kuba i Tomek?

14. Wyznaczyć wszystkie prostokąty, których boki mają długości wyrażające się całkowitą liczbą centymetrów i dla których liczba wyrażająca pole w cm^2 jest dwa razy większa od liczby wyrażającej obwód w cm.

15. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AC. Odcinki DE i DF są odpowiednio dwusiecznymi kątów wewnętrznych ABD i CBD. Punkt M jest punktem przecięcia odcinków BD i EF. Udowodnić, że $|DM| = \frac{1}{2} \cdot |EF|$.

16. Na osiedlu mamy 77 domów. Czy można połączyć te domy siecią telefonów tak, aby każdy dom był połączony dokładnie z 15 innymi domami?

17. Na okręgu wypisano 7 liczb naturalnych. Uzasadnić, że istnieją takie dwie sąsiednie liczby, że ich suma jest parzysta.

18. Czy liczba $10^{2014} + 8$ jest podzielna przez 9?

19. Czy liczba $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots + 5^{2013} + 5^{2014}$ jest podzielna przez 6?

20. Uzasadnić, że w prostokącie, który nie jest kwadratem, punkty przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych tego prostokąta są wierzchołkami kwadratu.

21. Czy liczbę 2014 można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych?

22. Suma dwóch liczb naturalnych dodatnich jest równa 777. Jaką największą wartość może przyjąć ich największy wspólny dzielnik?

23. W prostokącie $ABCD$ wierzchołek A połączono odcinkami ze środkami boków BC i CD. Czy jeden z tych odcinków może być dwa razy dłuższy od drugiego?

24. W trójkącie ABC dwusieczne kątów wewnętrznych BAC i ABC przecinają się w punkcie O. Wyznaczyć miarę kąta ACB wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 125°$.

25. Wyznaczyć liczby naturalne $x,\ y,\ z$ takie, aby $x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \dfrac{30}{7}$.

Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2013/2014!