Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej
Zadania przygotowawcze do II spotkania etapu rejonowego w dniu 2 lutego 2019 r.

Tematyka:
1. Obliczanie pól wielokątów.
2. Układ współrzędnych.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
4. Kąty wierzchołkowe, naprzemianległe, przyległe i odpowiadające.
5. Kąty zewnętrzne i wewnętrzne różnych wielokątów.

1. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = 2a - 4b + 3$ oraz $a \Box b = 3b - a$.
Rozwiąż równanie: $(4x-2)\triangle(3x-1) = 4\Box[(-3)\triangle(-1)]$.
2. Obwód prostokąta jest równy 360 cm. Dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych dzieli dłuższy bok prostokąta w stosunku $2:5$. Oblicz długości boków prostokąta oraz iloraz pól figur, na które dwusieczna ta rozcięła prostokąt. Rozpatrz wszystkie przypadki.
3. W trójkącie ABC o miarach kątów wewnętrznych CAB, ABC, BCA, pozostających (w podanej kolejności) w stosunku $2:3:4$, poprowadzono dwusieczne kątów wewnętrznych, które przecinają się w punkcie O. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie A_1, dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie B_1, dwusieczna kąta BCA przecina bok AB w punkcie C_1. W ten sposób utworzono wiele różnych trójkątów, do których zaliczamy między innymi trójkąt AC_1C, trójkąt BA_1O, trójkąt ABC itd. Wskaż wśród wszystkich powstałych trójkątow:
a) dwa trójkąty równoramienne,
b) parę trójkątów, które mają taki sam zestaw miar kątów wewnętrznych.
4. Równoległobok $ABCD$ ma pole równe 60. Punkt E należy do boku AB i $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$. Punkt F należy do boku BC i $\frac{|CF|}{|FB|} = \frac{2}{3}$. Oblicz pole trójkąta DEF.
5. Punkty $A = (-8,3)$ i $D = (-6,-4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $X = (-3,7)$ jest środkiem boku AB. Podaj współrzędne wierzchołków B i C. Oblicz pole równoległoboku.
6. Uzupełnij kwadraty magiczne:

$-2{,}1x^2+3{,}4x$		
$-0{,}3x^2+2{,}8x$	$4{,}5x^2-2x$	

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y$		$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$
	$-x-\frac{1}{4}y$	

7. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = a+b-4$ oraz $a\Box b = 3a+4b$.
a) Oblicz: $32 \triangle 8$, $(-6)\triangle 11$, $13\Box 7$, $(-4)\Box(-10)$, $(4\Box 11)\triangle(20\Box 13)$, $(-2)\Box[(-3)\triangle(4\Box 5)]$.
b) Rozwiąż równania: $4 \triangle x = 11$, $x \triangle x = 20$, $x\Box 23 = 125$, $23\Box x = 125$, $x\Box(2x) = 70$.
c) Wykonaj operacje na wyrażeniach algebraicznych: $(2x-3y)\triangle(-x+5y)$, $(5x+8y)\Box(-3x+2y)$, $(((x\triangle x)\triangle x)\triangle x)\triangle x$, $(((x\Box x)\Box x)\Box x)\Box x$, $[(x+3y)\Box x]\triangle(6x-y)$.
8. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$. Punkt D należy do ramienia BC. Kąt BAD ma miarę trzykrotnie **większą** od miary kąta DAC. Wiadomo też, że odcinki AD i DC są tej samej długości. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkątów ABD i ADC.
9. Punkt D należy do boku AB trójkąta ABC i jest różny od punktów A i B. Uzasadnij, że iloraz pól trójkątów ACD i DCB jest równy ilorazowi długości odcinków $|AD|$ i $|DB|$.
10. W trójkącie ABC: punkt A_1 należy do boku CB i $|CA_1| = \frac{1}{7}|CB|$; punkt C_1 należy do boku AB i $|AC_1| = \frac{1}{5}|AB|$; punkt A_2 należy do odcinka A_1B i $|A_1A_2| = \frac{1}{3}|A_1B|$. Wiadomo, że pole trójkąta C_1BA_2 jest równe 16 cm^2. Oblicz pole trójkąta ABC.
11. Punkt E należy do boku AB równoległoboku $ABCD$ i nie jest wierzchołkiem tego równoległoboku. Prosta DE przecina przekątną AC w punkcie X. Uzasadnij, że pola trójkątów AXD i EXC są równe.
12. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC pozostają w stosunku $10:6:4$. Dwusieczne mniejszych kątów wewnętrznych B i C przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie B_1, dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie C_1. Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta AC_1PB_1.
13. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o kącie przy dłuższej podstawie α. Dwusieczne sąsiednich kątów **zewnętrznych** przecinają się w punktach K, L, M, N. Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta o wierzchołkach w punktach K, L, M, N. Jakim czworokątem jest czworokąt o wierzchołkach K,L,M,N?

14. Czworokąt $ABCD$ ma kąty wewnętrzne o miarach: $|\sphericalangle A| = 90^o$, $|\sphericalangle B| = 50^o$, $|\sphericalangle C| = 90^o$. Dwusieczne sąsiednich kątów **zewnętrznych** przecinają się w punktach K, L, M i N. Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta $KLMN$. Jakim czworokątem jest $KLMN$?
15. Miary **zewnętrznych** kątów trójkąta pozostają w proporcji $4 : 3 : 2$. Znajdź miarę kąta między dwusiecznymi wychodzącymi z wierzchołków mniejszych kątów **wewnętrznych** tego trójkąta.
16. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej AC wybrano punkt X różny od punktu przecięcia przekątnych. Przez punkt X poprowadzono prostą m równoległą do boku AB, przecinającą bok AD w punkcie M i bok BC w punkcie N, oraz prostą n równoległą do boku AD, przecinającą bok AB w punkcie P i bok DC w punkcie Q. Uzasadnij, że czworokąty $MXQD$ i $PBNX$ mają równe pola.
17. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD mamy $|BC| = |CD| = |DA|$ i przekątna AC jest prostopadła do boku BC. Oblicz miary kątów tego trapezu.
18. Punkty $A = (-2, 4)$ i $B = (4, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, którego pole jest równe 24. Znajdź współrzędne punktu C wiedząc, że: a) odcięta punktu C jest równa -3, b) trójkąt ABC jest równoramienny, c) trójkąt ABC jest prostokątny, d) trójkąt ABC jest ostrokątny.
19. Pięciokąt $ABCDE$ ma wierzchołki o współrzędnych: $A = (0, -5)$, $B = (11, 8)$, $C = (0, 7)$, $D = (-8, -4)$, $E = (-6, -8)$. Porównaj pola trójkąta ABC i czworokąta $CDEA$.
20. Dane są punkty o współrzędnych: $(-4, -2)$, $(3, -2)$, $(-1, 4)$. Wyznacz wszystkie równoległoboki, których wierzchołki znajdują się w podanych punktach i podaj współrzędne tych wierzchołków. Który z tych równoległoboków ma największe pole?
21. Punkty $A = (-2, -2)$ i $B = (6, -2)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$, w którym podstawa CD jest dwa razy krótsza od podstawy AB, kąty przy wierzchołkach A i B są ostre, a pole trapezu jest równe 24. Wiadomo też, że współrzędne wierzchołków C i D są liczbami całkowitymi. Ile istnieje różnych par punktów C i D, które wraz z punktami A i B tworzą wierzchołki trapezu $ABCD$ o podanych własnościach. Podaj współrzędne punktów C i D w każdym z przypadków.
22. Punkty $A = (-4, -2)$, $B = (-1, -7)$, $C = (5, -2)$ są trzema z czterech wierzchołków czworokąta $ABCD$. Pole trójkąta ACD jest dwukrotnie większe od pola trójkąta ABC. Współrzędne wierzchołka D są liczbami całkowitymi. W ilu różnych punktach płaszczyzny może znajdować się punkt D, jeśli wiadomo, że czworokąt $ABCD$ jest wypukły, tzn. wszystkie kąty wewnętrzne tego czworokąta mają miary mniejsze niż 180°?
23. W prostokątnym układzie współrzędnych dane są trzy punkty $X = (-2, 4)$, $Y = (1, 9)$ oraz $O = (6, -1)$. Wiadomo, że punkty X i Y są wierzchołkami równoległoboku, a punkt O punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Podaj współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków tego równoległoboku. Oblicz pole tego równoległoboku.
24. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-25, -30)$, $B(50, 0)$, $C(65, 40)$ i $D(0, 15)$. Przekątna AC dzieli czworokąt na dwa trójkąty: ABC i ADC. Oblicz iloraz długości wysokości h_B i h_D poprowadzonych w tych trójkątach z wierzchołków B i D do podstawy AC.
25. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC, przy czym $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{1}{3}$. Punkt P leżący wewnątrz trójkąta połączono odcinkami ze wszystkimi wymienionymi punktami. Jaką część pola trójkąta ABC stanowi łączne pole trójkątów APK, BPL i CPM?
26. Środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego $ABCD$ połączono odcinkami, tworząc cztery czworokąty. Pole „małego” czworokąta zawierającego punkt A ma pole P_A, podobnie pole „małego” czworokąta zawierającego punkt B jest równe P_B, a pole „małego” czworokąta zawierającego punkt C jest równe P_C. Oblicz pole czwartego „małego” czworokąta.

Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań:
– *Liga Zadaniowa*, str. 69-73 (zad. 1-29, 34, 36, 45, 46, 48), str. 79-87 (zad. 101, 125, 126, 128, 130, 131, 141, 142, 163, 168, 169, 172-178, 182, 183);
– *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 47-52, 370-457, 534-556;
– *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, str. 145-166;
– *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Kąty, Pola i obwody.
Dodatkowe zadania przygotowawcze do etapu wojewódzkiego:
– *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 383, 401, 411-413, 417, 419, 424, 435, 442.

Uwaga II. W soboty, począwszy od 20 października, w godz. 11:00 - 12:30, na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII o tematyce związanej z *Ligą Zadaniową*. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie *Ligi Zadaniowej* http://liga.mat.umk.pl . Serdecznie zapraszamy.