

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

II klasa gimnazjum - ETAP REJONOWY

I spotkanie konkursowe – 21 listopada 2009 r. – Zestaw II

Zadania konkursowe

1. Obliczyć:

$$\frac{9 \cdot 4^{30} \cdot 9^{18} + 16 \cdot 3^{40} \cdot 8^{18}}{2^{18} \cdot 6^{38} + 2^{58} \cdot 27^{12}}.$$

2. Oblicz:

$$\sqrt[4]{7\sqrt[3]{27} + 15\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{10\sqrt[4]{256} + 8\sqrt[4]{81}}.$$

3. Rozwiąż równanie:

$$0,16 : \left[\frac{(0,2x + 0,6) \cdot \frac{2}{3}}{0,125} - 2,4 \right] = 0,04.$$

4. Pewną działkę Piotr przekopie w ciągu 15 godzin, Zbyszek w ciągu 10 godzin, a Michał w ciągu 6 godzin. W jakim czasie przekopią tę działkę pracując razem?

5. W dwóch beczkach znajduje się łącznie 80 litrów wody. Jeżeli z pierwszej beczki przelalibyśmy do drugiej tyle, aby jej zawartość w drugiej beczce podwoiła się, a następnie z drugiej przelalibyśmy do pierwszej tyle, aby jej zawartość w pierwszej beczce podwoiła się, to w obu beczkach byłoby tyle samo wody. Ile jest wody w każdej beczce?

6. Na stadionie, którego bieżnia ma 400 m długości odbył się bieg na 10 km. Zwycięzca ukończył bieg po 30 minutach, a ostatni zawodnik po 32 minutach. Po ilu okrążeniach zwycięzca zdublował ostatniego przeciwnika? Przyjmij, że każdy zawodnik biegł ze stałą prędkością.

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

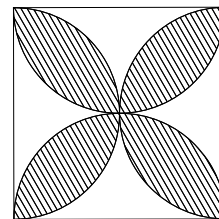
Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe w dniu 9 stycznia 2010 r.

Tematyka

1. Pole i obwód koła.
2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

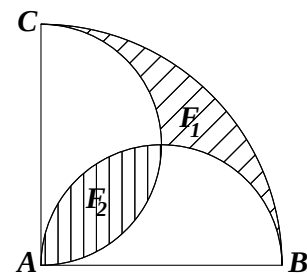
1. Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury na rysunku obok, gdzie długość boku kwadratu jest równa 6 cm, a łuki są odpowiednio półokręgami.



2. Czy liczba $2^{30} + 5^{40}$ jest liczbą pierwszą?

3. Czy liczba $2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right)$ jest liczbą pierwszą?

4. Oblicz pola figur F_1 , F_2 , F_3 , F_4 jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny o przyprostokątnych długości 6 cm, a łuki CA i AB są półokręgami, zaś łuk CB jest ćwiartką okręgu o środku A .

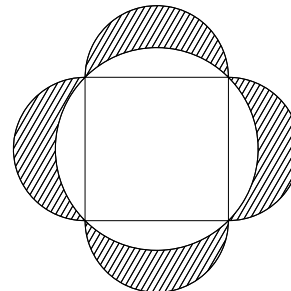


5. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^{-1}$$

a następnie obliczyć jego wartość dla $a = \sqrt{5} - 1$ i $b = 1 + \sqrt{5}$.

6. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu wynosi 8 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.

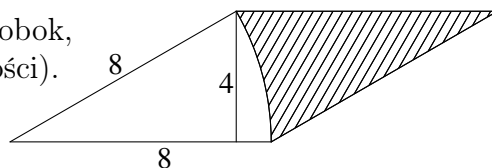


7. Czy liczba

$$3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2007}\right)$$

jest pierwszą?

8. Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury (patrz rysunek obok, na którym dane są długości jego boków oraz jednej z wysokości).



9. Czy liczba $4^{101} + 5^{2008}$ jest liczbą pierwszą?

10. Pewna liczba naturalna n przy dzieleniu przez 2007 i 2008 daje tę samą resztę równą 1000. Jaką resztę otrzymamy dzieląc tę liczbę przez 12?

11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b takich, że $a \cdot b < 0$ zachodzi nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. Pokaż, kiedy zachodzi równość.

12. Dane wyrażenie algebraiczne doprowadź do najprostszej postaci:

a)

$$\left[\left(a + \frac{ab}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a \right) \right] : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

a następnie oblicz jego wartość dla $a = -\frac{4}{5}$ i $b = 0,6$.

b)

$$\left(x + y - \frac{4xy}{x+y} \right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2} \right),$$

a następnie oblicz jego wartość dla $x = 0,6$ i $y = -0,4$.

c)

$$\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} + 1 \right) \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2},$$

a następnie oblicz wartość tego wyrażenia dla $a = \frac{2}{5}$ i $b = 0,375$.

13. W kwadracie $ABCD$ poprowadzono dwa okręgi o środkach w wierzchołkach A i B i o promieniu równym bokowi kwadratu. Okręgi te podzieliły kwadrat na cztery obszary. Oblicz pola i obwody tych obszarów, jeśli długość boku kwadratu jest równa 5 cm.

14. Oblicz:

a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}},$

b) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) (\sqrt{3}+5)^{-1}.$

15. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\frac{1}{b(abc+a+c)} - \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} : \frac{1}{a+\frac{1}{b}};$ b) $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab} \right)^{-1}.$

Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiór zadań – „Liga Zadaniowa” – zad. 51-87, 276-310.