

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe etapu rejonowego
w dniu 13.02.2010 dla uczniów klas II gimnazjum

Tematyka:

1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.
2. Działania na wyrazeniach algebraicznych.
3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. W trójkącie ABC niech D będzie środkiem boku BC . Oblicz pole trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AD| = 10$ cm.
2. Wyrażenie $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} - \frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$ sprowadź do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = 3 + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{2} - 1$.
3. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(2, 2)$, a jednym z jego wierzchołków jest punkt $(2, 6)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki sześciokąta oraz obliczyć jego pole i obwód.
4. Obliczyć odległość między środkami okręgów wpisanego i opisanego dla trójkąta, którego boki mają długości 30, 30, 48.
5. Obliczyć: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2008}}\right)^2$.
6. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną AD . Wyznaczyć kąty trójkąta ABC , jeśli środek okręgu wpisanego w trójkąt ABD jest jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .
7. Obliczyć $(10^2 + 1) \cdot (10^4 + 1) \cdot (10^8 + 1) \cdot \dots \cdot (10^{64} + 1) \cdot 99$.
8. Obliczyć $\sqrt{2006 \cdot 2008 \cdot 2010 \cdot 2012 + 16}$.
9. W trapezie $ABCD$ podstawami są AB i CD , natomiast ramię AD jest równe sumie podstaw AB i CD . Udowodnić, że dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i D przecinają się na ramieniu BC .
10. Wyznaczyć pole i obwód trójkąta prostokątnego, w którym długość promienia okręgu wpisanego jest równa 4 cm i długość promienia okręgu opisanego jest równa 16 cm.
11. Wyznaczyć pole i obwód trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 2 cm i 8 cm.

12. Dany jest trójkąt AOB , gdzie $A = (6, 0)$, $B = (0, 6)$ i $O = (0, 0)$. Niech A_1 będzie obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej OB , B_1 - obrazem punktu B w symetrii osiowej względem prostej OA i O_1 - obrazem punktu O w symetrii osiowej względem prostej AB . Oblicz pole trójkąta $A_1B_1O_1$.
13. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości: 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$ w podanej kolejności.
14. Środkiem symetrii rombu jest punkt $(0, 0)$. Jednym z jego wierzchołków jest punkt $(2, -2)$. Wyznaczyć współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu, jeśli jego pole wynosi 8.
15. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD . Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_1 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_2 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD . Udowodnić, że $r + r_1 + r_2 = |CD|$.
16. Obliczyć odległość między środkami okręgów wpisanego i opisanego dla trójkąta, którego boki mają długości 20, 20, 32.
17. Obliczyć wartość wyrażenia:
 - a. $1 + (2 + 1) \cdot (2^2 + 1) \cdot (2^4 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{1024} + 1)$,
 - b. $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2})$,
 - c. $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}) \cdot (\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$.
18. Przedstawić w najprostszej postaci:
 - a. $\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2} - \frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - xy}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{y^2 \cdot x^2 - y^4}$,
 - b. $\frac{2b+a - \frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b} \cdot \frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$.
19. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. Każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.
20. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(-1, -1)$, a jednym z jego wierzchołków jest punkt $(-5, -1)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki sześciokąta oraz obliczyć jego pole i obwód.
21. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości w przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Uwaga: Można wykorzystać zbiór zadań „Liga Zadaniowa”, zad 51-87, 276-310.