

LIGA ZADANIOWA UMK W TORUNIU
PREZENT WAKACYJNY 2010
DLA UCZNIÓW GIMNAZJUM

1. Czy można napisać takich 25 liczb jedna za drugą tak, aby suma każdych trzech kolejnych liczb była dodatnia a suma wszystkich liczb była ujemna?
2. W kratki tablicy 7×7 wpisano po jednej liczbie. Czy może się zdarzyć, że w każdym wierszu iloczyn liczb jest ujemny, a w każdej kolumnie iloczyn liczb jest dodatni?
3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które są podzielne przez 5 i przez 49 i które mają 10 dzielników.
4. O liczbie pierwszej p wiadomo, że $p > 3$ i dla pewnej liczby naturalnej n zapis dziesiętny liczby p^n składa się z 20 cyfr. Uzasadnić, że w zapisie T_m pewna cyfra występuje co najmniej trzy razy.
5. Czy może suma cyfr kwadratu pewnej liczby naturalnej być równa 2010?
6. Uzasadnić, że liczba $\underbrace{11 \dots 1}_{2010} \underbrace{22 \dots 2}_{2010}$ (2010 jedynek, 2010 dwójek) jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.
7. Czy liczby od 1 do 2010 można podzielić na cztery zbiory tak, aby suma liczb drugiego zbioru była o 10 większa od sumy liczb pierwszego zbioru, a suma liczb trzeciego zbioru była o 10 większa od sumy liczb w drugim zbiorze oraz suma liczb czwartego zbioru była o 10 większa od sumy liczb trzeciego zbioru?
8. Uzasadnić, że liczba $13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + \dots + 13^{2010}$ jest podzielna przez 7.
9. Czy istnieje 2010 kolejnych liczb całkowitych takich, że ich suma jest równa 2010^2 ?
10. Wyznaczyć najmniejszą wartość x , dla której zachodzą równości $x = a + b + c = d + e + f$, gdzie a, b, c, d, e, f są parami różnymi liczbami naturalnymi.
11. Wiadomo, że $a + b + c = 5$, $ab + bc + ca = 5$. Ile wynosi $a^2 + b^2 + c^2$?
12. Punkt przecięcia się przekątnych w równoległoboku rzutujemy prostopadłe na każdą z prostych zawierających boki tego równoległoboku. Udowodnić, że rzuty te są wierzchołkami pewnego równoległoboku.
13. Niech a, b będą długościami przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym, zaś c jest długością przeciwprostokątnej. Która z liczb $a^3 + b^3$ czy c^3 jest większa?
14. W trójkącie prostokątnym na przeciwprostokątnej znaleźć taki punkt, że odległość między prostopadłymi rzutami tego punktu na przyprostokątne trójkąta była jak najmniejsza.
15. Niech P będzie punktem wewnętrznym sześciokąta foremnego $ABCDEF$ taki, że suma długości odcinków PA, PB, PC, PD, PE, PF jest równa obwodowi sześciokąta. Uzasadnić, że P jest środkiem sześciokąta.
16. Długość podstawy CD trapezu $ABCD$ jest równa długości ramienia AD i jest dwukrotnie krótsza od podstawy AB . Wyznaczyć $|\angle ACB|$.
17. W pewnym trójkącie punkt przecięcia jednej z dwusiecznych z pewną środkową jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wyznaczyć miary kątów tego trójkąta.
18. W trójkącie prostokątnym niech K będzie środkiem przeciwprostokątnej AB i niech M będzie punktem na boku BC takim, że $|BM| = 2|MC|$. Udowodnić, że $|\angle MAB| = |\angle MKC|$.
19. Niech K będzie punktem wewnętrznym kwadratu $ABCD$, który nie leży na przekątnej BD . Niech M będzie punktem leżącym na boku CD takim, że $|MK| = |KD|$ i $BK \perp KM$. Wyznaczyć miarę kąta KBM .
20. Wyznaczyć kąty trapezu, w którym stosunek długości ramion wynosi 1:2, a suma miar kątów przy dłuższej podstawie jest równa 120° .
21. Niech P będzie punktem wewnętrznym prostokąta $ABCD$. Udowodnić, że z odcinków PA, PB, PC, PD można zawsze wybrać takie trzy odcinki, że z nich można skonstruować trójkąt.
22. Nauczyciel zadał kolejno po jednym przykładzie z tabliczki mnożenia (zakres do 100) Adamowi, Markowi, Olkowi, Pawłowi i Tomkowi. Każdy z nich udzielił poprawnej odpowiedzi. Przy czym okazało się, że u każdego kolejnego ucznia wynik był półtora razy większy niż u poprzednika. Jakie liczby mnożył Paweł?
23. Suma liczb naturalnych x, y, z jest równa 100. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $xy + yz + zx$.
24. W ciągu kolejnych pięciu dni intensywnych przygotowań do finału *Ligi Zadaniowej* Piotr rozwiązał 31 zadań. Każdego dnia przygotowań, począwszy od drugiego dnia, Piotr rozwiązywał więcej zadań niż poprzedniego dnia. Piątego (ostatniego) dnia rozwiązał on trzy razy więcej zadań, niż pierwszego. Ile zadań rozwiązał on czwartego dnia?
25. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie: $3x^2 - 2y^2 = 1998$.
26. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c takich, że $a + b + c = 1$ zachodzi nierówność:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Życzymy udanych wakacji!
Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej 2010/2011!