

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Gimnazjum

Prezent wakacyjny 2011 r.

1. Która z liczb

$$\frac{10^{2010} + 1}{10^{2011} + 1} \quad \text{czy} \quad \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1}$$

jest większa?

2. Uzasadnić, że liczba $2010^2 + 2010^2 \cdot 2011^2 + 2011^2$ jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Czy istnieje 2011 kolejnych liczb naturalnych, których suma jest równa 2011^3 ?
4. Uzasadnić, że jeśli suma liczb naturalnych (dodatnich) a i b jest równa 770, to iloczyn liczb $a \cdot b$ nie dzieli się przez 770.
5. Czy liczba 57599 jest liczbą pierwszą?
6. W zapisie dziewięciocyfrowej liczby naturalnej n występują wszystkie cyfry oprócz zera. Po przestawieniu cyfr w liczbie n otrzymano liczbę 8 razy mniejszą. Wyznaczyć wszystkie liczby n o tej własności.
7. Liczba a jest najmniejszą liczbą naturalną, której suma cyfr jest równa 2011. Wyznaczyć sumę pierwszej i ostatniej cyfry liczby a .
8. Ile jest liczb naturalnych n takich, że liczba $n + 18$ jest dzielnikiem liczby $n + 53$?
9. Czy liczba $13 + 13^2 + 13^3 + \dots + 13^{2010} + 13^{2011}$ jest podzielna przez 7?
10. Wyznaczyć wszystkie liczby trzycyfrowe, których suma cyfr zmniejszy się trzykrotnie, jeśli liczbę zwiększymy o 3.
11. Czy można liczby naturalne $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ ustawić w ciąg w taki sposób, aby różnica każdych dwóch liczb sąsiednich (od większej odejmujemy mniejszą) była nie mniejsza niż 50?
12. Czy można znaleźć 5 liczb całkowitych takich, że 10 liczb, które są sumami par liczb z tych pięciu liczb, będą kolejnymi liczbami całkowitymi.
13. Dla ilu liczb naturalnych n kwadrat liczby $\sqrt{7 + \sqrt{n}} + \sqrt{7 - \sqrt{n}}$ jest liczbą całkowitą?
14. Ile elementów ma najliczniejszy podzbiór zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2010, 2011\}$ taki, że dla dowolnych dwóch elementów tego podzbioru ich różnica nie jest liczbą pierwszą?
15. Suma cyfr pewnej liczby naturalnej n jest równa 10. Czy może być równa 10^3 suma cyfr liczby n^3 ?
16. Czy można w tablicę o pięciu wierszach i sześciu kolumnach wpisać wszystkie liczby naturalne od 1 do 30 (każdą liczbę wpisujemy tylko w jedną kratkę) tak, by sumy liczb w kolumnach były takie same?
17. Znaleźć 1000 liczb naturalnych (dodatnich), których suma jest równa iloczynowi tych liczb.
18. Naturalne liczby a, b, c spełniają nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Pokazać, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}$.

- $$\begin{cases} x^2 + y^3 + z^4 = 13 \\ x^2 - y^3 + z^4 = 11 \\ x^2 + y^3 - z^4 = 5 \end{cases}$$

32. Czy trójkąt równoboczny można podzielić na 2012 trójkątów równobocznych?

*Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej
w roku szkolnym 2011/2012!*