

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

II klasa gimnazjum - ETAP REJONOWY I spotkanie konkursowe – 27 listopada 2010 r. – Zestaw II

Zadania konkursowe

1. Oblicz:

$$\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}.$$

2. Oblicz:

$$\frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}.$$

3. Mianownik ułamka jest o 2010 większy od licznika tego ułamka. Gdy ułamek ten skrócono otrzymano $\frac{11}{17}$. Wyznacz postać ułamka przed skróceniem.

4. Która z liczb jest większa

$$\frac{1}{240} \quad \text{czy} \quad \frac{1}{15 \cdot 30} + \frac{1}{30 \cdot 45} + \frac{1}{45 \cdot 60} + \dots + \frac{1}{1995 \cdot 2010}?$$

5. Pewną pracę Mirek wykona w ciągu 6 dni, a tę samą pracę Piotr wykonałby w ciągu 16 dni zaś Marek wykonałby ją w ciągu 48 dni. W jakim czasie wykonaliby oni tę pracę pracując wspólnie?

6. Danych jest 51 liczb. Iloczyn wszystkich liczb i iloczyny każdych czterech z nich są liczbami dodatnimi. Uzasadnij, że każda z tych liczb jest dodatnia.

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe w dniu 15 stycznia 2011 r.

Tematyka

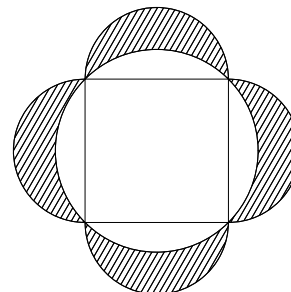
1. Pole i obwód koła.
2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

1. Czy liczba $2^{2010} + 15^{20}$ jest liczbą pierwszą?
2. Dane wyrażenie algebraiczne doprowadź do najprostszej postaci:

$$\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1 \right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2},$$

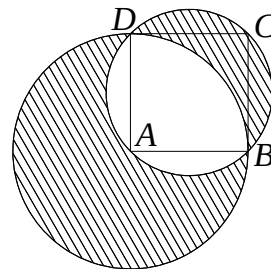
a następnie oblicz wartość tego wyrażenia dla $a = 3 + \sqrt{2}$ i $b = 1 - \sqrt{2}$.

3. Oblicz pole i obwód zakreślonych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu wynosi 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.



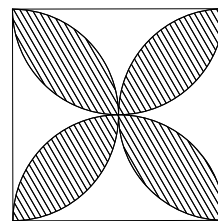
4. Dany jest kwadrat o boku 6 cm. Kreślimy cztery koła, każde o środkach w wierzchołku kwadratu i okrąg takiego koła przechodzi przez środek kwadratu. Figura F składa się z czterech części, które są częściami wspólnymi par tych kół. Oblicz pole i obwód figury F .
5. Pewna liczba n przy dzieleniu przez 2009 i przez 2010 daje tę samą resztę 1000. Jaka resztę otrzymamy dzieląc n przez 21?

6. Na kwadracie $ABCD$ o boku 4 opisano okrąg, a następnie wykreślono okrąg o środku w punkcie A i promieniu AB (patrz rysunek obok). Oblicz pole i obwód figury zakreskowanej.



7. Czy liczba: a) $2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right)$
b) $3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \dots \left(1 + \frac{2}{2007}\right)$
jest liczbą pierwszą?

8. Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury na rysunku obok, gdzie długość boku kwadratu jest równa 6 cm, a łuki są odpowiednio półokręgami.



9. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

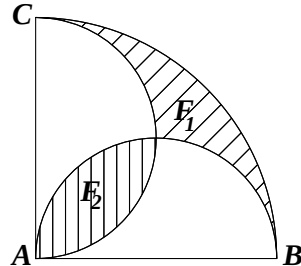
a) $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{-1}, \quad a = \sqrt{5} - 1, b = 1 + \sqrt{5}.$

b) $\left[\left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a\right)\right] : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad a = -\frac{4}{5}, b = 0,6.$

c) $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2}\right), \quad x = 0,6, y = -0,4.$

d) $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} + 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2}, \quad a = \frac{2}{5}, b = 0,375.$

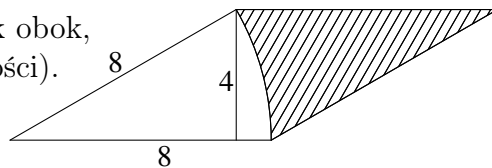
10. Oblicz pola figur F_1, F_2, F_3, F_4 jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny o przyprostokątnych długości 6 cm, a łuki CA i AB są półokręgami, zaś łuk CA jest ćwiartką okręgu o środku A .



11. Pewna liczba naturalna n przy dzieleniu przez 2007 i 2008 daje tę samą resztę równą 1000. Jaką resztę otrzymamy dzieląc tę liczbę przez 12?

12. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b takich, że $a \cdot b < 0$ zachodzi nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. Pokaż, kiedy zachodzi równość.

13. Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury (patrz rysunek obok, na którym dane są długości jego boków oraz jednej z wysokości).



14. Oblicz:

a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}},$

b) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}.$

15. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\frac{1}{b(abc+a+c)} - \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} : \frac{1}{a+\frac{1}{b}}; \quad b) \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{-1}.$

16. W kwadracie $ABCD$ poprowadzono dwa okręgi o środkach w wierzchołkach A i B i o promieniu równym bokowi kwadratu. Okręgi te podzieliły kwadrat na cztery obszary. Oblicz pola i obwody tych obszarów, jeśli długość boku kwadratu jest równa 5 cm.

Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać:

- ✓ Zbiór zadań – „Liga Zadaniowa” – zad. 51-87, 276-310, Wydawnictwo Aksjomat Toruń
- ✓ Koło matematyczne w gimnazjum, Wydawnictwo Aksjomat Toruń