

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

II klasa gimnazjum - ETAP REJONOWY

II spotkanie konkursowe – 15 stycznia 2011 r. – Zestaw III

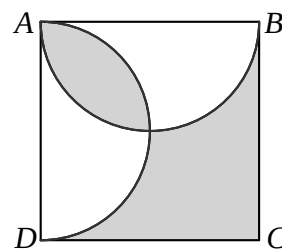
Zadania konkursowe

1. Uzasadnij, że liczba $3^{16} - 1$ jest podzielna przez 64.
2. Uzasadnij, że jeśli liczby $2 + a$ i $35 - b$ są podzielne przez 11, to liczba $a + b$ jest podzielna przez 11.
3. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

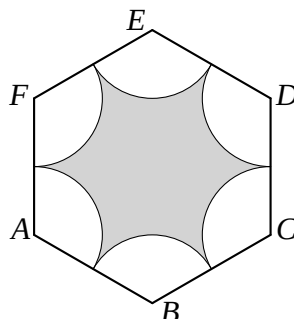
$$\left[\left(a + \frac{ab}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a \right) \right] : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

a następnie wyznacz jego wartość dla $a = -0,8$ i $b = 0,6$.

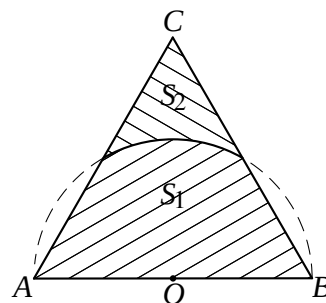
4. W kwadracie $ABCD$ narysowano dwa półokręgi o średnicach AB i AD (patrz rysunek). Wiedząc, że $|AB| = 4$ oblicz pole i obwód zacieniowanej figury.



5. Wielokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym i jego obwód równy jest 36. Każdy wierzchołek sześciokąta jest środkiem okręgu o promieniu równym połowie długości boku. Ile jest równy obwód i pole zacieniowanej figury.



6. W trójkącie równobocznym o boku długości 6 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 3. Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2 .



Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe
w dniu 19 lutego 2011 r.

Tematyka

1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.
2. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. Obliczyć: $\sqrt{2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 16}$.

2. Wyrażenie: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b} \right) : \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a} \right) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right) \right]$, doprowadzić do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = 4 + \sqrt{7}$ i $b = \sqrt{7} - 4$.

3. Obliczyć pole trapezu, w którym długości podstaw wynoszą 5 cm i 15 cm, a długości przekątnych wynoszą 12 cm i 16 cm.
4. W równoległoboku długości boków wynoszą 5 cm i 6 cm. Obliczyć długości przekątnych równoległoboku, jeśli wiadomo, że symetralna dłuższego boku przechodzi przez wierzchołek równoległoboku.
5. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(3, -3)$, a jednym z jego wierzchołków jest $(3, 7)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego sześciokąta oraz obliczyć jego pole i obwód.
6. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.
7. W trójkącie ABC niech D będzie środkiem boku BC . Oblicz pole trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm i $|AD| = 10$ cm.
8. Wyrażenie $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} - \frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$ sprowadź do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = 3 + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{2} - 1$.
9. Obliczyć: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2009} + \sqrt{2008}}\right)^2$.
10. Oblicz wartość wyrażenia $(10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1) \cdot \dots \cdot (10^{64} + 1) \cdot 99$.
11. Obliczyć $\sqrt{2006 \cdot 2008 \cdot 2010 \cdot 2012 + 16}$.
12. W trapezie $ABCD$ podstawami są AB i CD , natomiast ramię AD jest równe sumie podstaw AB i CD . Udowodnić, że dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i D przecinają się na ramieniu BC .
13. Wyznacz pole i obwód trójkąta prostokątnego, w którym długość promienia okręgu wpisanego jest równa 4 cm i długość promienia okręgu opisanego jest równa 16 cm.
14. Dany jest trójkąt OAB , gdzie $A = (6, 0)$, $B = (0, 6)$ i $O = (0, 0)$. Niech A_1 będzie obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej OB , B_1 – obrazem punktu B w symetrii osiowej względem prostej OA i O_1 – obrazem punktu O w symetrii osiowej względem prostej AB . Oblicz pole trójkąta $A_1B_1O_1$.
15. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości $2, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}$ w podanej kolejności.
16. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD . Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , zaś r_1 – promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_2 – promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD . Udowodnić, że $r + r_1 + r_2 = |CD|$.
17. Obliczyć odległość między środkami okręgów wpisanego i opisanego dla trójkąta, którego boki mają długości 20, 20, 32.
18. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.
19. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki długości 2 cm i 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
20. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(-1, -1)$, a jednym z wierzchołków jest punkt $(-5, -1)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki sześciokąta oraz obliczyć jego pole i obwód.
21. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać:

- ✓ Zbiór zadań – *Liga Zadaniowa* – zad. 51-87, 276-310, Wydawnictwo Aksjomat Toruń
- ✓ *Koło matematyczne w gimnazjum*, Wydawnictwo Aksjomat Toruń