

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

II klasa gimnazjum - ETAP REJONOWY III spotkanie konkursowe – 19 lutego 2011 r. – Zestaw IV

Zadania konkursowe

1. Oblicz:

$$\sqrt{1 + 2012\sqrt{1 + 2011\sqrt{1 + 2010\sqrt{1 + 2009 \cdot 2007}}}}$$

2. Przekształć wyrażenie

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right)$$

do najprostszej postaci i rozstrzygnij, która z liczb $\frac{1}{8}$, czy wartość wyrażenia dla $x = \frac{4}{5}$ jest większa?

3. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają równe długości i wynoszą po 8 cm, a przedłużenia ramion przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

4. W trójkącie, którego długości boków wynoszą 16, 12, 20 wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i odległość między środkami tych okręgów.

5. Oblicz pole sześciokąta, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają tę samą miarę, a boki mają kolejno długości: 2, 4, 2, 4, 2, 4.

6. Dla dowolnych liczb a i b udowodnij nierówność:

$$a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b).$$

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania niespodzianki na spotkanie kończące *Ligę Zadaniową* w roku szkolnym 2010/2011.

1. Pewien „mądrała” twierdzi, że istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że a nie dzieli się przez c , b nie dzieli się przez c , natomiast $a \cdot b$ dzieli się przez c^2 . Czy ma on rację?
2. Jurek ma kalkulator, który mnoży przez 3, dodaje do danej liczby liczbę 3 lub dzieli liczbę przez 3, jeśli jest ona podzielna przez 3. Czy przy pomocy tego kalkulatora można z liczby 1 otrzymać liczbę 13?
3. Grupa dzieci jadła cukierki. Każdy z nich zjadł o 7 cukierków mniej niż reszta dzieci przy czym każdy z nich zjadł co najmniej jeden cukierek. Ile cukierków zjadły te dzieci?
4. Wyznaczyć liczby dwucyfrowe, które są równe podwojonemu iloczynowi swoich cyfr.
5. KUB jest sześcianem liczby naturalnej. Uzasadnić, że TOP nie jest sześcianem liczby naturalnej. (UWAGA. KUB i TOP są liczbami trzycyfrowymi, przy czym różnym literom odpowiadają różne cyfry).

6. Uzasadnić, że równanie $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.
7. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ jest liczbą całkowitą.
8. Podać liczbę trzycyfrową, która ma własność: różnica jej i liczby 7 jest podzielna przez 7, także różnica tej liczby i liczby 8 jest podzielna przez 8 oraz różnica jej i liczby 9 jest podzielna przez 9. Ile takich liczb istnieje?
9. Czy liczby naturalne od 1 do 23 można podzielić na dwie rozłączne grupy tak, by suma liczb w jednej z nich była o 21 większa od sumy liczb drugiej grupy?
10. Udowodnić, że liczba sześciocyfrowa $\overline{abcabc}$ nie może być kwadratem liczby naturalnej.
11. Czy istnieje liczba naturalna, dla której zapis dziesiętny iloczynu wszystkich liczb naturalnych od 1 do niej kończy się dokładnie 30 zerami?
12. Czy może suma cyfr kwadratu liczby naturalnej być równa 2010 lub 2012?
13. Odtworzyć działanie

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & & \star & \star & \star \\
 \times & & & \star & \star \\
 \hline
 & \star & \star & \star & \star
 \end{array} , \\
 \begin{array}{cccc}
 \star & \star & \star & \star \\
 \hline
 \star & \star & \star & \star & \star
 \end{array}
 \end{array}$$

jeśli w miejsce gwiazdek wstawiono tylko cyfry będące liczbami pierwszymi.

14. W każdej kratce tablicy o wymiarach 2011×2011 zapisano liczbę spełniającą zasadę, że każda liczba jest średnią arytmetyczną swoich sąsiadów. Uzasadnić, że największa liczba i najmniejsza znajdują się albo w wierszach brzegowych lub kolumnach brzegowych.
15. Wyznacz liczby dwucyfrowe, które są podzielne przez sumę swoich cyfr.
16. Przez punkt A przechodzą trzy proste, które parami przecinają się pod kątem 60° . Udowodnić, że dla dowolnego punktu X odległość punktu X od jednej z prostych jest równa sumie odległości tego punktu X od pozostałych prostych.
17. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ na zewnątrz zbudowano trójkąty równoboczne BCM i CDN . Udowodnić, że trójkąt AMN jest równoboczny.
18. Na płaszczyźnie mamy dwa odcinki AB i CD , które nie są równoległe ani nie są prostopadłe oraz są rozłączne. Wyznaczyć zbiór punktów, które są środkami odcinków o końcach należących do AB i CD (oczywiście jeden koniec jest na jednym z odcinków, a drugi na drugim odcinku).
19. Udowodnij, że jeśli $a \geq 0$, $b \geq 0$, to $(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3)$.
20. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$, jeśli $xyz = 1$.

*Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2010/2011!*