

Liga Zadaniowa-województwo kujawsko-pomorskie

Klasa I gimnazjum

17. 03. 2012 r. Etap rejonowy

III spotkanie konkursowe

1. Z podanego wzoru $R = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ wyznacz r_1 , a następnie oblicz wartość r_1 , jeśli $R = 3,5$ oraz $r_2 = \frac{1}{2}$.
2. Dane są współrzędne trzech punktów $(-3; 2)$, $(3; -3)$, $(5, 0)$, . Wyznacz wszystkie równoległoboki, dla których trzy spośród jego czterech wierzchołków znajdują się w punktach o podanych współrzędnych. Czy wśród wyznaczonych równoległoboków są romby i prostokąty?
3. Od poniedziałku do środy Marek zawsze kłamie, w pozostałe zaś dni tygodnia mówi prawdę. Pewnego dnia Marek spotkał Marię i powiedział:
1) *Wczoraj kłamałem.*
2) *Od pojutrze przez dwa kolejne dni będę kłamał.*
W jakim dniu Marek spotkał Marię?
4. W świeżych grzybach jest 90% wody. Po wstępnym wysuszeniu zostaje w nich 60% wody. Gdy wysuszono pewną porcję grzybów stały się one lżejsze o 15 kg. Ile grzybów było przed suszeniem?
5. Piotr wyszedł z domu mając w kieszeni pewną liczbę złotych i pięćzłotówek, razem kwotę większą od 140 zł, a mniejszą od 150 zł. Wydał trzecią część posiadanej gotówki. Pozostało mu tyle złotych, ile miał pięćzłotówek i tyle pięćzłotówek, ile przedtem miał złotych. Ile miał złotych i pięćzłotówek, gdy wychodził z domu?
6. W małej chińskiej wiosce nad brzegiem rzeki Amur mieszkają 33 rodziny. Każda z nich ma jeden, dwa lub trzy rowery. Liczba rodzin posiadających trzy rowery jest taka sama jak liczba rodzin posiadających tylko jeden rower. Ile jest rowerów w tej wiosce?

Uwaga: Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Czas trwania zawodów 90 minut.

Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową w roku szkolnym 2011/2012.

1. Nauczyciel, podał Piotrowi cztery dodatnie liczby. Piotr napisał na tablicy liczby 3, 4 i 7 i stwierdził, że każda z tych liczb jest sumą pewnych trzech liczb z podanych czterech liczb przez nauczyciela. Uzasadnij, że Piotr się pomylił.
2. Pewna liczba naturalna przy dzieleniu z resztą przez 3, 18 i 48 daje takie reszty, że ich suma jest równa 39. Udowodnij, że liczba ta przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.
3. Na tablicy napisano dziewięć kolejnych liczb trzycyfrowych. W zapisie dziesiętnym żadnej z nich nie występuje cyfra zero. Dla każdej liczby obliczono iloczyn cyfr, a następnie zsumowano te iloczyny. Czy suma ta może być równa 1125?
4. Kuba wybrał sobie liczbę naturalną, następnie obliczył iloczyn cyfr tej liczby, a następnie iloczyn ten pomnożył przez samą liczbę i otrzymał wówczas 1716. Jaką liczbę wybrał Kuba?
5. Na okręgu umieszczono 14 dodatnich liczb. Suma każdych czterech kolejnych liczb (idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara) jest równa 30. Uzasadnij, że każda z tych liczb jest mniejsza niż 15.
6. Podaj przykład liczby dwucyfrowej, w której iloczyn cyfr pomnożony przez sumę cyfr jest równy 84.
7. Suma dwóch dzielników liczby 160 000 jest równa 1025. Jakie to są dzielniki?

8. Trzy kolejne liczby dwucyfrowe zapisano jedna za drugą i otrzymano liczbę sześciocyfrową (np. 121314). Okazało się, że liczba ta jest podzielna przez 17. Jaka liczba sześciocyfrowa zapisano?
9. Mamy pięć przedmiotów tak samo wyglądających o różnych wagach. Przy pomocy wagi szalkowej, ale bez odważników uporządkować przedmioty w porządku rosnących wag. Wolno wykonać tylko 5 ważeń.
10. Mamy liczbę trzycyfrową. Od niej odejmujemy sumę jej cyfr. Z otrzymaną różnicą postępujemy tak samo. Uzasadnić, że po 100 takich operacjach otrzymamy zero.
11. Czy istnieje liczba naturalna, dla której suma cyfr jej kwadratu jest równa 2012?
12. Czy istnieje wielokąt wypukły, który ma 2012 przekątnych?
13. Marek i Janek grają w następującą grę: chłopcy kolejno na zmianę piszą po jednej cyfrze liczby dwudziestocyfrowej. Zaczyna Marek. Ponadto używają oni tylko cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Wygrywa Janek jeśli dwudziestocyfrowa liczba jest podzielna przez 9, w przeciwnym razie wygrywa Marek. Który z chłopców może zagwarantować sobie wygraną niezależnie od gry rywala?
14. Prostokąt o wymiarach 6 x 7 podzielono na kwadraty jednostkowe. 25 pewnych kwadratów pokolorowano na niebiesko. Uzasadnij, że istnieje kwadrat o wymiarach 2 x 2, w którym co najmniej trzy kwadraty są pokolorowane na niebiesko.
15. Mamy 10 kartek z cyframi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Losujemy po trzy kartki. Uzasadnij, że przy pomocy tych kartek można utworzyć liczby (jedno-, dwu-, trzycyfrową), która jest podzielna przez 3.
16. Która z liczb

$$\underbrace{88 \dots 8}_{20 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{33 \dots 3}_{12 \text{ cyfr}} \quad \text{czy} \quad \underbrace{44 \dots 4}_{20 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{66 \dots 6}_{12 \text{ cyfr}}$$

jest większa?

17. Symbol $50!$ oznacza iloczyn liczb całkowitych od 1 do 50 włącznie. Gdybyś rzeczywiście wykonał to działanie, to ile zer otrzymałbyś na końcu?
18. Kartkę papieru o wymiarach 16 cm na 32 cm przecięto na pół. Jedną z tych części przecięto znowu na pół i powtarzano tę czynność tyle razy, aż otrzymano ostatecznie prostokąt o wymiarach 1 cm na 2 cm. Ile cięć w sumie wykonano?
19. Liczba *nadwymiarowa* to taka liczba, której suma dzielników właściwych (czyli z wyłączeniem samej liczby) jest większa od niej samej. Na przykład dzielnikami liczby 8, są 1, 2 i 4, zaś $1 + 2 + 4$ to mniej niż 8, a zatem 8 nie jest liczbą *nadwymiarową*. Ile jest liczb *nadwymiarowych* mniejszych od 30?
17. Jedna z 27 monet jest fałszywa i trochę cięższa od innych. Ważąc w ręku nie można jej odróżnić od innych. Jak ustalić, która moneta jest fałszywa, ważąc trzy razy na wadze szalkowej bez odważników?
18. Jurek ma kalkulator, który mnoży przez 3, dodaje do danej liczby liczbę 3 lub dzieli liczbę przez 3, jeśli jest ona podzielna przez 3. Czy przy pomocy tego kalkulatora można z liczby 1 otrzymać liczbę 13?
19. Pewien „mądrała” twierdzi, że istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że a nie dzieli się przez c , b nie dzieli się przez c , natomiast $a \cdot b$ dzieli się przez c^2 . Czy ma on rację?
20. Mamy do dyspozycji 3 kolory. Na ile sposobów można pomalować ściany sześcianu, używając każdego koloru dwukrotnie, przy czym każda ściana jest pomalowana wyłącznie jednym kolorem?

Zapraszamy do udziału w zakończeniu Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2011/2012!