

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Gimnazjum

Prezent wakacyjny 2012 r.

1. Pomiedzy niektóre cyfry $2\ 6\ 0\ 5\ 2\ 0\ 1\ 2 = 100$ wstawić znaki działań i nawiasy, by zachodziła równość.
2. Mamy 99 kartek. Na każdej z nich piszemy jedną z liczb $1, 2, 3, \dots, 99$ tak, by każda liczba była użyta. Następnie mieszamy kartki i rozkładamy je na stole czystymi stronami do góry i ponownie na kartkach piszemy liczby $1, 2, 3, \dots, 99$ według tych samych reguł co poprzednio. Na każdej kartce sumujemy liczby napisane po obu jej stronach i następnie przemnażamy otrzymane sumy. Uzasadnić, że w rezultacie otrzymany iloczyn sum jest liczbą parzystą.
3. Czy można wybrać takie cztery różne liczby naturalne, aby suma dowolnych dwóch z nich była potęgą liczby 3?
4. Udowodnić, że w liczbie naturalnej pięćdziesięciocyfrowej, w której nie występuje cyfra zero, można wykreślić pewne cyfry tak, by pozostałe (bez zmiany porządku cyfr) tworzyły liczbę podzielną przez 101.
5. Wyznaczyć liczbę czterocyfrową $AABB$, która jest kwadratem liczby naturalnej.
6. Uzasadnić, że zapis dziesiętny żadnej potęgi liczby 2 nie kończy się czterema jednakowymi cyframi.
7. Czy istnieje liczba czterocyfrowa $\overline{abcd}$ taka, że jeśli odejmiemy od niej liczbę $\overline{dcba}$, to otrzymamy 1008?
8. Czy istnieją cyfry a, b , przy czym $a < b$, takie, że liczba $\underbrace{\overline{aa\dots a}}_{b \text{ cyfr}} - \underbrace{\overline{bb\dots b}}_{a \text{ cyfr}}$ jest liczbą pierwszą?
9. Czy może zapis dziesiętny kwadratu liczby naturalnej zaczynać się od 2012 dziewiątek?
10. Liczby całkowite x, y, z spełniają warunek $xy + yz + zx = 1$. Pokazać, że liczba $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ jest kwadratem liczby całkowitej.
11. Liczby naturalne n i $2n$ mają takie same sumy cyfr, np. 18, 36. Uzasadnić, że liczba n jest podzielna przez 9.
12. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb $a = 2^{2012} - 1$ i $b = 2^{2013} + 1$.
13. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) takie, że spełnione jest równanie $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.
14. Wyznaczyć liczby naturalne a, b, c takie, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
15. Udowodnić, że jeśli a, b są liczbami nieujemnymi, to $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$.
16. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$
17. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$
18. Pokazać, że jeśli liczby a, b, c, d są takie, że $a + b + c + d = 0$, to
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leq 0.$$

19. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{1}{ab}.$$

20. Dany jest kwadrat o boku długości 1. Wyznaczyć wszystkie punkty, których suma odległości od prostych zawierających boki kwadratu jest równa 4.

21. W trójkącie prostokątnym ABC , $|\sphericalangle C| = 90^\circ$, poprowadzono środkową CD . Punkt K jest punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ADC z bokiem AD . Wyznaczyć kąt trójkąta ABC jeśli K jest środkiem boku AD .

22. Wewnątrz trójkąta ABC na dwusiecznej kąta B obrano punkt M taki, że $|AM| = |AC|$ i $|\sphericalangle BCM| = 30^\circ$. Wyznaczyć miarę kąta AMB .

23. Na płaszczyźnie mamy 25 punktów o następującej własności: wśród dowolnych trzech z nich można zawsze wybrać dwa punkty między którymi odległość jest mniejsza niż 1. Uzasadnić, że spośród wszystkich można wybrać 13 punktów, które leżą w pewnym kole o promieniu 1.

24. Na płaszczyźnie danych jest 7 prostych, przy czym żadne dwie nie są równoległe. Uzasadnić, że wśród nich istnieją takie dwie, że kąt między nimi jest mniejszy niż 26° .

25. Tablicę o wymiarach 8×8 podzielono na 64 jednakowe kratki. Każdą liczbę spośród $1, 2, \dots, 64$ wpisano w jedną kratkę, przy czym w każdej kratce jest tylko jedna liczba. Uzasadnić, że przy dowolnym wpisywaniu istnieją dwie kratki sąsiednie (o wspólnym boku), w których liczby różnią się co najmniej o 5.

26. W kwadracie o boku długości 1 wybrano 102 punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że istnieją wśród nich takie trzy punkty, że pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach jest mniejsze niż 0,01.

27. Przekątne AC i BD czworokąta (wypukłego) $ABCD$ są prostopadłe. Przez środki boków AB i AD poprowadzono proste prostopadłe odpowiednio do przeciwległych boków CD i BC . Udowodnić, że punkt przecięcia tych prostych leży na prostej AC .

28. Na płaszczyźnie mamy 2012 punktów będących wierzchołkami 2012-kąta foremnego. Dwóch uczniów gra w następującą grę: łączą dwa punkty z danych odcinkiem zachowując następującą regułę:

1) nie wolno poprowadzić odcinka z punktu ani do punktu jeśli punkt ten już został połączony z jakimś innym punktem.

2) prowadzony odcinek nie może przecinać się z innym odcinkiem wcześniej poprowadzonym. Uczniowie wykonują swoje czynności kolejno na zmianę. Który z uczniów może zapewnić sobie wygraną, jeśli przegrywa ten, który nie może poprowadzić odcinka zgodnie z warunkami gry?

Życzymy udanych wakacji!
Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej
w roku szkolnym 2012/2013!