

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

II klasa gimnazjum - ETAP REJONOWY I spotkanie konkursowe – 26 listopada 2011 r. – Zestaw II

Zadania konkursowe

1. Oblicz:

$$\frac{6^{52} \cdot 5^{51} - 6 \cdot 3^{53} \cdot 10^{50}}{2^{52} \cdot 15^{50} + 6^{50} \cdot 5^{51}}.$$

2. Oblicz:

$$\frac{\sqrt[4]{15 \cdot \sqrt[3]{27} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}}}{\sqrt[3]{26 \cdot \sqrt[4]{256} + 7 \cdot \sqrt[4]{81}}}.$$

3. Ustaw w porządku rosnącym liczby:

$$2^{90}, 3^{60}, 5^{45}, 8^{45}, 16^{30}.$$

4. Mianownik ułamka jest o 2012 większy od licznika tego ułamka. Ułamek ten po skróceniu jest równy $\frac{3}{7}$. Wyznacz postać tego ułamka przed skróceniem.

5. Piotr wykonałby pewną pracę w ciągu 16 godzin, a Zbyszek wykonałby tę samą pracę w ciągu 24 godzin, zaś Mirek wykonałby tę pracę w ciągu 48 godzin. Czy wykonaliby oni tę pracę w ciągu jednego ośmiogodzinnego dnia pracy pracując razem?

6. Przedstaw liczbę

$$5 + 55 + 555 + 5555 + \dots + \underbrace{5 \dots 5}_{2011}$$

w najprostszej postaci.

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

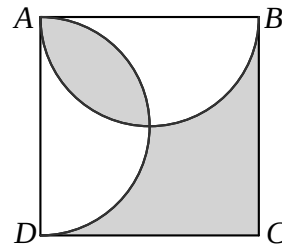
Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe w dniu 14 stycznia 2012 r.

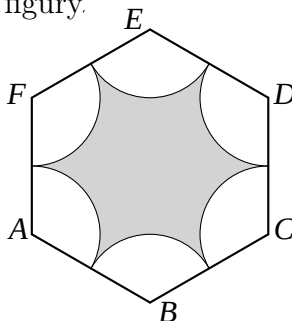
Tematyka

1. Pole i obwód koła.
2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

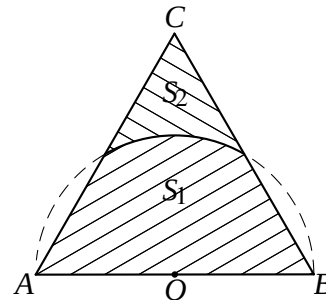
1. Uzasadnij, że liczba $3^{16} - 1$ jest podzielna przez 64.
2. Uzasadnij, że jeśli liczby $2 + a$ i $35 - b$ są podzielne przez 11, to liczba $a + b$ jest podzielna przez 11.
3. W kwadracie $ABCD$ narysowano dwa półokręgi o średnicach AB i AD (patrz rysunek). Wiedząc, że $|AB| = 4$ oblicz pole i obwód zacieniowanej figury.



4. Wielokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym i jego obwód równy jest 36. Każdy wierzchołek sześciokąta jest środkiem okręgu o promieniu równym połowie długości boku. Ile jest równy obwód i pole zacieniowanej figury.



5. W trójkącie równobocznym o boku długości 6 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 3. Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2 .



6. Czy liczba $2^{2010} + 15^{20}$ jest liczbą pierwszą?

7. Pewna liczba n przy dzieleniu przez 2009 i przez 2010 daje tę samą resztę 1000. Jaką resztę otrzymamy dzieląc n przez 21?

8. Dany jest kwadrat o boku 6 cm. Kreślimy cztery koła, każde o środkach w wierzchołku kwadratu i okrąg takiego koła przechodzi przez środek kwadratu. Figura F składa się z czterech części, które są częściami wspólnymi par tych kół. Oblicz pole i obwód figury F .

9. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

a) $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{-1}, \quad a = \sqrt{5} - 1, b = 1 + \sqrt{5}.$

b) $\left[\left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a\right)\right] : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad a = -\frac{4}{5}, b = 0,6.$

c) $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2}\right), \quad x = 0,6, y = -0,4.$

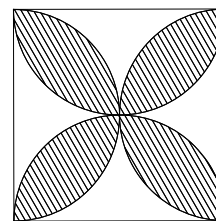
d) $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} + 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2}, \quad a = \frac{2}{5}, b = 0,375.$

10. Czy liczba: a) $2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right)$

b) $3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \dots \left(1 + \frac{2}{2007}\right)$

jest liczbą pierwszą?

11. Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury na rysunku obok, gdzie długość boku kwadratu jest równa 6 cm, a łuki są odpowiednio półokręgami.

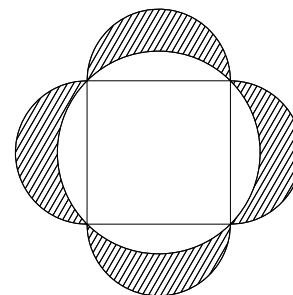


12. Oblicz:

a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}},$

b) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}.$

13. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu wynosi 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.



14. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b takich, że $a \cdot b < 0$ zachodzi nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. Pokaż, kiedy zachodzi równość.

15. Pewna liczba naturalna n przy dzieleniu przez 2007 i 2008 daje tę samą resztę równą 1000. Jaką resztę otrzymamy dzieląc tę liczbę przez 12?

16. W kwadracie $ABCD$ poprowadzono dwa okręgi o środkach w wierzchołkach A i B i o promieniu równym bokowi kwadratu. Okręgi te podzieliły kwadrat na cztery obszary. Oblicz pola i obwody tych obszarów, jeśli długość boku kwadratu jest równa 5 cm.

Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać:

✓ Zbiór zadań – „Liga Zadaniowa” – zad. 51-87, 276-310, Wydawnictwo Aksjomat Toruń

✓ Koło matematyczne w gimnazjum, Wydawnictwo Aksjomat Toruń