

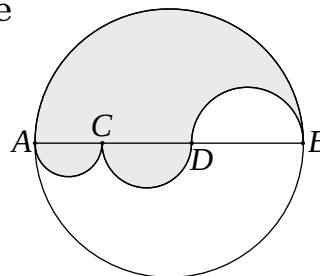
Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

II klasa gimnazjum - ETAP REJONOWY

II spotkanie konkursowe – 14 stycznia 2012 r. – Zestaw III

Zadania konkursowe

1. Na średnicy AB koła obrano punkty C i D tak, że $|AC| = 6$, $|CD| = 8$, $|DB| = 10$. Na każdym z odcinków AC , CD i DB zbudowano półkole (patrz rysunek). Porównaj pola i obwody obszarów zacieniowanego i niezacieniowanego w kole.



2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

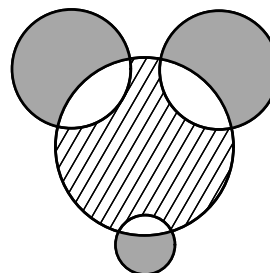
$$\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2},$$

a następnie wyznacz jego wartość dla $a = \frac{2}{5}$, $b = 0,375$.

3. Mamy dwa koła o promieniu 2, z których każde przechodzi przez środek drugiego koła. Oblicz obwód i pole części wspólnej tych kół.

4. Która z liczb $3^{100} - 2^{150}$ czy $3^{50} + 2^{75}$ jest większa?

5. Niech P będzie polem obszaru zacieniowanego, a S polem obszaru zakreskowanego (część największego koła). Średnice kół są równe: 6, 4, 4, 2. Uzasadnij, że $P = S$.



6. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}},$$

gdzie $a \geq 1$. Następnie oblicz wartość tego wyrażenia (najprostsza postać) dla $a = \sqrt{\frac{57+28\sqrt{2}}{16}}$ oraz porównaj tę wartość z liczbą $\frac{5}{2}$.

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe w dniu 17 marca 2012 r.

Tematyka

1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.
2. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. Oblicz: $\sqrt{1 + 2012\sqrt{1 + 2011\sqrt{1 + 2010\sqrt{1 + 2009 \cdot 2007}}}}$.

2. Przekształć wyrażenie $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right)$ do najprostszej postaci i rozstrzygnij, która z liczb $\frac{1}{8}$, czy wartość wyrażenia dla $x = \frac{4}{5}$ jest większa?

3. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają równe długości i wynoszą po 8 cm, a przedłużenia ramion przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

4. W trójkącie, którego długości boków wynoszą 16, 12, 20 wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i odległość między środkami tych okręgów.
5. Oblicz pole sześciokąta, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają tę samą miarę, a boki mają kolejno długości: 2, 4, 2, 4, 2, 4.
6. Dla dowolnych liczb a i b udowodnij nierówność: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.
7. Obliczyć: $\sqrt{2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 16}$.
8. Wyrażenie: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b}\right) : \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a}\right) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)\right]$, doprowadzić do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = 4 + \sqrt{7}$ i $b = \sqrt{7} - 4$.
9. Obliczyć pole trapezu, w którym długości podstaw wynoszą 5 cm i 15 cm, a długości przekątnych wynoszą 12 cm i 16 cm.
10. W równoległoboku długości boków wynoszą 5 cm i 6 cm. Obliczyć długości przekątnych równoległoboku, jeśli wiadomo, że symetralna dłuższego boku przechodzi przez wierzchołek równoległoboku.
11. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(3, -3)$, a jednym z jego wierzchołków jest $(3, 7)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego sześciokąta oraz obliczyć jego pole i obwód.
12. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.
13. W trójkącie ABC niech D będzie środkiem boku BC . Oblicz pole trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm i $|AD| = 10$ cm.
14. Obliczyć: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2009} + \sqrt{2008}}\right)^2$.
15. W trapezie $ABCD$ podstawami są AB i CD , natomiast ramię AD jest równe sumie podstaw AB i CD . Udowodnić, że dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i D przecinają się na ramieniu BC .
16. Wyznacz pole i obwód trójkąta prostokątnego, w którym długość promienia okręgu wpisanego jest równa 4 cm i długość promienia okręgu opisanego jest równa 16 cm.
17. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości 2, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$ w podanej kolejności.
18. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.
19. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD . Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , zaś r_1 – promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_2 – promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD . Udowodnić, że $r + r_1 + r_2 = |CD|$.
20. Obliczyć odległość między środkami okręgów wpisanego i opisanego dla trójkąta, którego boki mają długości 20, 20, 32.
21. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.
22. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki długości 2 cm i 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
23. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(-1, -1)$, a jednym z wierzchołków jest punkt $(-5, -1)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki sześciokąta oraz obliczyć jego pole i obwód.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać:

- ✓ Zbiór zadań – *Liga Zadaniowa* – zad. 51-87, 276-310, Wydawnictwo Aksjomat Toruń
- ✓ *Koło matematyczne w gimnazjum*, Wydawnictwo Aksjomat Toruń