

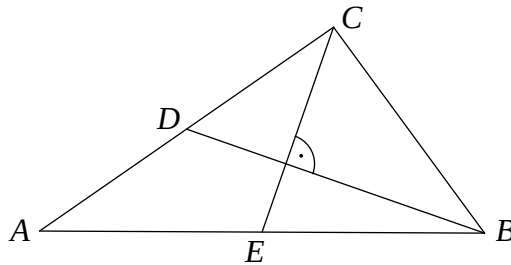
Zadania konkursowe

1. Oblicz:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2011}}\right)^2.$$

2. Oblicz pole trapezu, w którym długości podstaw wynoszą 10 cm i 20 cm, a długości przekątnych są równe 18 cm i 24 cm.

3. Środkowe BD i CE trójkąta ABC są prostopadłe oraz $|BD| = 8$ i $|CE| = 12$. Oblicz pole trójkąta ABC .



4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są w stosunku 3 : 4, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Obliczyć:

- a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
- c) długości środkowych tego trójkąta.

5. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(1, -1)$, a jednym z wierzchołków jest punkt $(5, -1)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki sześciokąta oraz obliczyć jego pole i obwód.

6. Jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to udowodnić, że

$$2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c).$$

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

**Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową
w roku szkolnym 2011/2012.**

1. Pewna liczba naturalna przy dzieleniu przez 3, 18 i 48 daje takie reszty, że ich suma jest równa 39. Udowodnić, że liczba ta przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

2. Na tablicy napisano dziewięć kolejnych liczb trzycyfrowych. W zapisie dziesiętnym żadnej z nich nie występuje cyfra zero. Dla każdej liczby obliczono iloczyn cyfr, a następnie zsumowano te iloczyny. Czy suma ta może być równa 1125?

3. Trzy kolejne liczby dwucyfrowe zapisano jedna za drugą i otrzymano liczbę sześciocyfrową (np. 121314). Okazało się, że liczba ta jest podzielna przez 17. Jaką liczbę sześciocyfrową zapisano?

4. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p takie, by liczba $p^2 + 14$ była pierwsza.

5. Uzasadnić, że liczba naturalna mająca nieparzystą liczbę dzielników jest kwadratem liczby naturalnej.

6. Wiadomo, że liczba naturalna n ma 2012 dzielników. Pokazać, że iloczyn tych dzielników jest równy n^{1006} .
7. Od liczby trzycyfrowej odjęto sumę cyfr tej liczby. Następnie tak samo postąpiono z otrzymaną różnicą. Operację tę powtórzono na kolejno otrzymanych różnicach 100 razy. Uzasadnić, że na końcu otrzymujemy liczbę zero.
8. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, większą niż 1, która jest co najmniej 600 razy większa od każdego swojego dzielnika będącego liczbą pierwszą.
9. Liczba naturalna n jest taka, że liczba $n^2 + 1$ jest liczbą dziesięciocyfrową. Uzasadnić, że w zapisie dziesiętnym liczby $n^2 + 1$ co najmniej jedna cyfra się powtarza.
10. Obliczyć $\frac{2 \cdot 2011}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2011}}$.
11. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku długości 1. Pokazać, że $|AP| + |BP| + |CP| \leq 2$.
12. Na boku AB na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano trójkąt równoboczny. Obliczyć odległość punktu C od środka trójkąta równobocznego, jeśli $|AB| = c$ i $\angle ACB = 120^\circ$.
13. Dwusieczna kąta CAB w trójkącie ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D . Udowodnić, że $|BD| = |DC| = |OD|$, gdzie O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
14. Uzasadnić, że jeśli w wypukłym czworokącie $ABCD$ odcinki łączące środki przeciwległych boków dzielą czworokąt na cztery czworokąty o równych obwodach, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
15. Na płaszczyźnie danych jest 2012 punktów takich, że dowolny trójkąt o wierzchołkach w tych punktach ma pole mniejsze niż 1. Udowodnić, że istnieje trójkąt o polu mniejszym niż 4, w którym leżą wszystkie dane punkty.
16. Uzasadnić, że kwadratu o wymiarach 10×10 nie można pokryć figurami kształtu  zbudowanymi z 4 kwadratów jednostkowych.
17. W tablicy o wymiarach 8×8 w każdą jednostkową kratkę wpisano liczbę naturalną wg zasady: każda wpisana liczba jest równa średniej arytmetycznej swoich sąsiadów. Ponadto suma liczb stojących w rogach tablicy jest równa 20. Jaka liczba stoi w polu będącym w drugim wierszu i czwartej kolumnie.
18. Prostokąt o wymiarach 6×7 podzielono na kwadraty jednostkowe. 25 pewnych kwadratów pokolorowano na niebiesko. Uzasadnij, że istnieje kwadrat o wymiarach 2×2 , w którym co najmniej trzy kwadraty są pokolorowane na niebiesko.
19. Marek i Janek grają w następującą grę: chłopcy kolejno na zmianę piszą po jednej cyfrze liczby dwudziestocyfrowej. Zaczyna Marek. Ponadto używają oni tylko cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Wygrywa Janek jeśli dwudziestocyfrowa liczba jest podzielna przez 9, w przeciwnym razie wygrywa Marek. Który z chłopców może zagwarantować sobie wygraną niezależnie od gry rywala?
20. Dwaj uczniowie grają w następującą grę: Na stole leży 500 zapalek. Uczniowie na zmianę biorą ze stołu zapalki. Każdy z nich może w jednym ruchu wziąć 1 lub 2 lub 4 lub 8 lub 16 lub 32 lub 64 lub 128 lub 256 zapalek. Wygrywa ten, który bierze ostatnie zapalki. Który z uczniów: zaczynający czy ten drugi może zapewnić sobie wygraną?
21. W klasie mamy 28 uczniów, którzy siedzą w 14 dwuosobowych ławkach. Co miesiąc wychowawca przesadza ich tak, aby w każdej ławce siedziała para uczniów, która dotychczas ze sobą nie siedziała. Przez ile miesięcy nauczyciel będzie mógł kontynuować to przesadzanie?
22. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d . Udowodnić, że $(1 + ab)^2 + (1 + cd)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1$.

*Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2011/2012!*