

Zadania przygotowawcze na I spotkanie etapu rejonowego w dniu 24 XI 2012 r.

Tematyka:

1. Wielkości wprost proporcjonalne.
2. Przekształcanie wzorów.
3. Równania i nierówności - zadania tekstowe.
4. Działania na potęgach i pierwiastkach.

1. Oblicz: $\frac{6^{52} \cdot 5^{51} - 6 \cdot 3^{53} \cdot 10^{50}}{2^{52} \cdot 15^{50} + 6^{50} \cdot 5^{51}}.$
2. Oblicz: $\frac{\sqrt[4]{15 \cdot \sqrt[3]{27}} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{26 \cdot \sqrt[4]{256}} + 7 \cdot \sqrt[4]{81}}.$
3. Ustaw w porządku rosnącym liczby: $2^{90}, 3^{60}, 5^{45}, 8^{45}, 16^{30}.$
4. Mianownik ułamka jest o 2012 większy od licznika tego ułamka. Ułamek ten po skróceniu jest równy $\frac{3}{7}$. Wyznacz postać tego ułamka przed skróceniem.
5. Piotr wykonałby pewną pracę w ciągu 16 godzin, a Zbyszek wykonałby tę samą pracę w ciągu 24 godzin, zaś Mirek wykonałby tę pracę w ciągu 48 godzin. Czy wykonaliby oni tę pracę w ciągu jednego ośmiogodzinnego dnia pracy pracując razem?
6. Przedstaw liczbę $5 + 55 + 555 + 5555 + \dots + \underbrace{55 \dots 5}_{2011}$ w najprostszej postaci.
7. Oblicz: $\sqrt[4]{7 \sqrt[3]{27}} + 15 \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{10 \sqrt[4]{256}} + 8 \sqrt[4]{81}.$
8. Rozwiąż równanie: $0,16 : \left[\frac{(0,2x + 0,6) \cdot \frac{2}{3}}{0,125} - 2,4 \right] = 0,04.$
9. Pewną działkę Piotr przekopie w ciągu 15 godzin, Zbyszek w ciągu 10 godzin, a Michał w ciągu 6 godzin. W jakim czasie przekopią tę działkę pracując razem?
10. W dwóch beczkach znajduje się łącznie 80 litrów wody. Jeżeli z pierwszej beczki przelalibyśmy do drugiej tyle, aby jej zawartość w drugiej beczce podwoiła się, a następnie z drugiej przelalibyśmy do pierwszej tyle, aby jej zawartość w pierwszej beczce podwoiła się, to w obu beczkach byłoby tyle samo wody. Ile jest wody w każdej beczce?
11. Na stadionie, którego bieżnia ma 400 m długości odbył się bieg na 10 km. Zwycięzca ukończył bieg po 30 minutach, a ostatni zawodnik po 32 minutach. Po ilu okrążeniach zwycięzca zdublował ostatniego przeciwnika? Przyjmij, że każdy zawodnik biegł ze stałą prędkością.
12. Oblicz a) $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33 \dots 3}_{2012},$ b) $4 + 44 + 444 + \dots + \underbrace{44 \dots 4}_{2012}.$
13. Która z liczb, $\sqrt{\frac{2010}{2011}}$ czy $\sqrt{\frac{2011}{2012}},$ jest większa?
14. Zbadaj, która z liczb $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$ czy 10^{55} jest większa?
15. Która z liczb $\frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{63 \cdot 65}$ czy $\frac{1}{11}$ jest większa?

16. Oblicz: a) $\frac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$, b) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$.
17. Oblicz:
 a) $\frac{\sqrt[5]{3125} \cdot \sqrt[4]{6561} \cdot \sqrt{729}}{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{15625} \cdot \sqrt{324}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{729}} \cdot \sqrt{48 \cdot 243}$,
 b) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$,
 c) $\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27}} + 15\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{10\sqrt[4]{256}} + 8\sqrt[4]{81}$.
18. Uzasadnij, że $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ jest liczbą podzielną przez 155 dla każdej liczby całkowitej dodatniej n .
19. Zapytano rybaka, ile waży złowiona przez niego ryba. Rybak odpowiedział: $\frac{2}{3}$ kg i jeszcze 2 razy po $\frac{2}{5}$ swojej masy. Ile waży ryba?
20. Dziadek i babcia mają razem 140 lat. Po ile lat ma każde z nich, jeżeli dziadek ma dwa razy tyle lat, ile babcia miała wtedy, gdy dziadek miał tyle lat ile ma teraz babcia?
21. Mianownik ułamka jest o 2004 większy od licznika. Ułamek ten skrócono i otrzymano $\frac{5}{17}$. Znajdź postać tego ułamka przed skróceniem.
22. Oblicz:

$$\frac{666666 \cdot 6666666}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} - \frac{777777 \cdot 7777777}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$
23. Uprość ułamek $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}$.
24. Porównaj liczbę $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{2005 \cdot 2009} + \frac{1}{2009 \cdot 2013}$ z liczbami $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{5}$.
25. Zapisz w najprostszej postaci liczbę $\underbrace{66 \dots 6}_{100 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{33 \dots 3}_{100 \text{ cyfr}}$ i oblicz sumę jej cyfr.
26. Czy zachodzi równość $\frac{2 \cdot 2012}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2012}} = 2013$?
27. Uzasadnij, że liczba $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2012$ jest podzielna przez 2013.
28. Udowodnij, że liczba $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2007 \cdot 2009 \cdot 2011 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2008 \cdot 2010 \cdot 2012$ jest podzielna przez 2013.

Uwaga. W przygotowaniach do I spotkania konkursowego można wykorzystać zbiór zadań - „Liga Zadaniowa” - str. 25, 26, 32, 33.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „Koło matematyczne w gimnazjum” - zadania 76, 52, 54, 73, 44.