

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

I spotkanie konkursowe – 24 listopada 2012 r. - Zestaw II

Zadania konkursowe

1. Mianownik ułamka jest o 2012 większy od licznika. Ułamek ten skrócono i otrzymano $\frac{7}{11}$. Znajdź postać tego ułamka przed skróceniem.
2. Oblicz:
$$\sqrt[4]{5\sqrt[3]{729} + 9\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{3\sqrt[4]{625} + 4\sqrt[4]{81}}.$$
3. Porównaj liczbę
$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2012}$$
z liczbami $\frac{3}{16}$ i $\frac{1}{4}$. Uporządkuj te liczby.
4. Piotr wykonałby pewną pracę w ciągu 8 godzin, a Zbyszek wykonałby tę samą pracę w ciągu 12 godzin, zaś Mirek wykonałby tę pracę w ciągu 24 godzin. Czy wykonaliby oni tę pracę w ciągu połowy jednego ośmiogodzinnego dnia pracy pracując razem?
5. Która z liczb $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2012)^2$ czy 2012^{1006} jest większa?
6. Wyznacz sumę cyfr liczby $\underbrace{(44 \dots 4)}_{20 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{(55 \dots 5)}_{10 \text{ cyfr}}.$

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

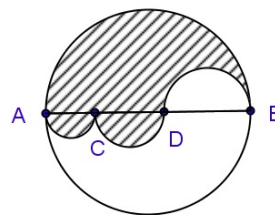
Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe w dniu 02 lutego 2013 r.

Tematyka:

1. Pole i obwód koła.
2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

1. Na średnicy AB koła obrano punkty C i D tak, że $|AC| = 6$, $|CD| = 8$, $|DB| = 10$. Na każdym z odcinków AC , CD i DB zbudowano półkole (patrz rysunek). Porównaj pola i obwody obszarów zacieniowanego i niezacieniowanego w kole.

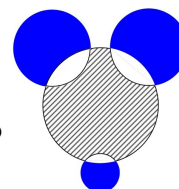


2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$, a następnie wyznacz jego wartość dla $a = \frac{2}{5}$, $b = 0,375$.

3. Mamy dwa koła o promieniu 2. Środek każdego z tych kół leży na brzegu drugiego. Oblicz obwód i pole części wspólnej tych kół.

4. Która z liczb $3^{100} - 2^{150}$ czy $3^{50} + 2^{75}$ jest większa?

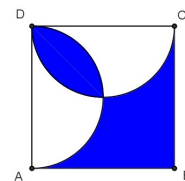
5. Niech P będzie polem obszaru zacieniowanego, a S polem obszaru zakreskowanego (część największego koła). Średnice kół są równe: 6, 4, 4, 2. Uzasadnij, że $P = S$.



6. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$, gdzie $a \geq 1$. Następnie oblicz wartość tego wyrażenia (najprostsza postać) dla $a = \sqrt{\frac{57+28\sqrt{2}}{16}}$ oraz porównaj tę wartość z liczbą $\frac{5}{2}$.

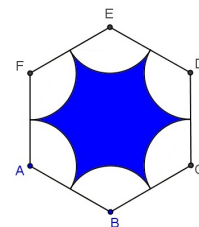
7. Uzasadnij, że liczba $3^{16} - 1$ jest podzielna przez 64.

8. W kwadracie $ABCD$ narysowano dwa półokręgi o średnicach CD i AD (patrz rysunek). Wiedząc, że $|AB| = 4$ oblicz pole i obwód zacieniowanej figury.



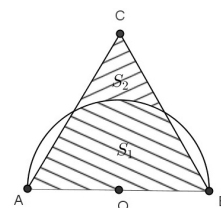
9. Czy liczba $2^{2010} + 15^{20}$ jest liczbą pierwszą?

10. Wielokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym i jego obwód jest równy 36. Każdy wierzchołek sześciokąta jest środkiem okręgu o promieniu równym połowie długości boku. Ile jest równy obwód i pole zacieniowanej figury?



11. Pewna liczba n przy dzieleniu przez 2009 i przez 2010 daje tę samą resztę 1000. Jaką resztę otrzymamy dzieląc n przez 21?

12. W trójkącie równobocznym o boku długości 6 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 3. Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2 .



13. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych:

a) $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^{-1}$, $a = \sqrt{5} - 1$, $b = 1 + \sqrt{5}$,

b) $\left[\left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a\right)\right] : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, $a = -\frac{4}{5}$, $b = 0,6$,

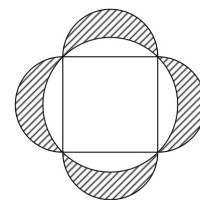
c) $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$, $a = 0,6$, $b = -0,4$.

14. Czy liczba: a) $2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right)$,

b) $3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \left(1 + \frac{2}{5}\right) \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2007}\right)$

jest liczbą pierwszą?

15. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu jest równa 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.



16. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b takich, że $a \cdot b < 0$ zachodzi nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. Pokaż, kiedy zachodzi równość.

17. Oblicz: a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$, b) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}$.

Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - „Liga Zadaniowa” - zad. 52 - 81 na str. 29 - 31 i zad. 211 - 239 na str. 91 - 95 oraz „Koło matematyczne w gimnazjum”.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „Koło matematyczne w gimnazjum” - zadania 536, 535, 546, 122 oraz przykład 10 ze strony 139 i przykład 4 na stronie 17.