

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY III spotkanie konkursowe – 2 marca 2013 r. - Zestaw IV

Zadania konkursowe

- Środkowe BD i CF trójkąta ABC są prostopadłe oraz $|BD| = 9cm$ i $|CF| = 12cm$. Wyznaczyć:
 - pole trójkąta ABC ,
 - długości boków trójkąta ABC .
- Obliczyć pole trapezu, w którym długości podstaw są równe $10cm$ i $30cm$, a długości przekątnych są równe $24cm$ i $32cm$.
- Oblicz $\sqrt{2009 \cdot 2011 \cdot 2015 \cdot 2017 + 36} + 10$.
- Środkiem kwadratu jest punkt $(0,0)$. Jednym z jego wierzchołków jest punkt $(3,4)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz oblicz obwód i pole kwadratu.
- Uzasadnić, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

- W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten kąt w stosunku $1 : 2$. Oblicz pole trójkąta jeśli długość tej środkowej wynosi $10cm$.

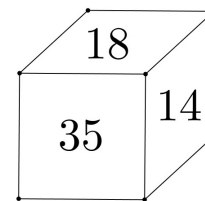
Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową w roku szkolnym 2012/13

- Jakie liczby trzycyfrowe zapisane przy pomocy parzystych cyfr są podzielne przez iloczyn swoich cyfr?
- Na widocznych ścianach sześcianu napisano liczby jak na rysunku.
Na pozostałych ścianach są liczby pierwsze takie, że sumy na przeciwległych ścianach są takie same. Jakie to liczby?
- Wskaż 11 kolejnych liczb naturalnych, których suma jest kwadratem liczby naturalnej.
- W pewnej liczbie naturalnej przestawiono niektóre cyfry i otrzymano liczbę trzy razy większą. Udowodnić, że ta ostatnia liczba jest podzielna przez 27.
- Czy istnieje liczba trzycyfrowa $\overline{abc}$, gdzie $a > c$, taka że $\overline{abc} - \overline{cba}$ jest kwadratem liczby naturalnej?
- Na tablicy wypisano w porządku rosnącym wszystkie liczby naturalne od 1 do 10000. Następnie starto te liczby, które nie dzieliły się ani przez 4 ani przez 11. Jaka liczba stoi na 2013-tym miejscu?
- Na tablicy napisano pewną ilość liczb różnych od zera. Każda z tych liczb jest równa połowie sumy pozostałych. Ile liczb napisano na tablicy?
- Czy można zapisać przy pomocy cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 liczbę sześciocyfrową używając każdej cyfry tylko raz, tak by była ona podzielna przez 11.
- Znaleźć wszystkie pary liczb pierwszych p, q , takie że liczby $7p + q$ i $pq + 11$ są pierwsze.



10. Dana jest liczba naturalna n . Czy można znaleźć liczbę naturalną, w której zapisie występują tylko dwie cyfry i która jest podzielna przez n ?
11. Jakie liczby pierwsze mogą być dzielnikami liczb postaci $111 \dots 111$?
12. Wyznaczyć liczby naturalne a, b, c, d , takie że $a + b + c + d = 30$ oraz $a \geq b \geq c \geq d$ i iloczyn $abcd$ jest największy.
13. Czy możliwe jest, aby pewien skończony zbiór liczb dodatnich miał taką własność, że kwadrat każdej liczby z tego zbioru jest większy od iloczynu jakichkolwiek dwóch innych liczb z tego zbioru?
14. Dla jakich liczb naturalnych x, y, z zachodzi nierówność $xyz < xy + yz + zx$?
15. Mamy trzy liczby dwucyfrowe, takie że suma dowolnych dwóch z nich jest równa liczbie, która powstaje z trzeciej liczby przez zmianę kolejności cyfr. Wyznaczyć sumę tych trzech liczb.
16. Niech A będzie liczbą naturalną. Oznaczmy przez b liczbę utworzoną przez dwie ostatnie cyfry liczby A , a przez a liczbę utworzoną przez pozostałe cyfry liczby A . Na przykład dla $A = 54023$ mamy $b = 23$ i $a = 540$. Udowodnić, że liczba A jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy
 - (a) $2a + b$ dzieli się przez 7,
 - (b) $5a - b$ dzieli się przez 7.
17. Znaleźć cyfry a, b, c, d takie, że liczby $a, \overline{cd}, \overline{ad}, \overline{abcd}$ są kwadratami liczb naturalnych.
18. Trzycyfrowa liczba $\overline{abc}$ o różnych cyfrach jest 5 razy mniejsza niż suma wszystkich liczb innych niż liczba $\overline{abc}$ i utworzonych z cyfr a, b, c poprzez przestawienie cyfr. Jaka to liczba?
19. Czy można w wierzchołkach ośmiokąta wpisać liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, po jednej liczbie w każdym wierzchołku, tak aby suma liczb w każdym trzech kolejnych wierzchołkach była
 - (a) większa niż 11,
 - (b) większa niż 13?

20. Rozwiązać rebus

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & \text{D} & \text{W} & \text{A} \\
 & \times & & \text{D} & \text{W} & \text{A} \\
 \hline
 & & * & * & \text{R} & * \\
 & * & * & * & * & \\
 \text{Y} & * & * & * & & \\
 \hline
 \text{C} & \text{Z} & \text{T} & \text{E} & \text{R} & \text{Y}
 \end{array}$$

21. Czy można przy pomocy dwóch naczyń o pojemności 9 l i 11 l pobrać z kranu 10 l wody?
22. Czy można w kwadracie 5×5 podzielonym na jednostkowe kwadraciki usunąć jeden kwadracik, tak aby powstała figurę pokryć prostokątami o wymiarach 1×3 ?
23. Czy można rozciąć kwadrat o wymiarach 6×6 na prostokąty o wymiarach 1×4 ?
24. W czworokącie $ABCD$ suma miar kątów $\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle BDC$ jest równa 180° , ponadto $|AD| = |BC|$. Udowodnij, że kąty wewnętrzne czworokąta przy wierzchołkach A i C mają równe miary.
25. Czy istnieje taki rok, w którym ani razu poniedziałek nie będzie trzynastego dnia miesiąca? Jaka może być w ciągu roku największa liczba poniedziałków, które wypadają trzynastego dnia miesiąca?

Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2012/2013!