

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie

Gimnazjum
Prezent wakacyjny 2015 r.

1. Oblicz:

a) $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}},$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2},$

c) $\frac{2+2^2+2^3+\dots+2^{2015}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{2015}}},$

d) $2010\frac{201}{1102} \cdot 2009\frac{201}{1102} - 2011\frac{201}{1102} \cdot 2008\frac{201}{1102},$

e) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\dots+2015^2-2016^2,$

f) $1+11+111+1111+\dots+\underbrace{11\dots 11}_{2015}.$

2. Uzasadnij, że $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < 1.$

3. Liczby naturalne od 1 do 2016 podzielono w pary. W każdej parze obliczono sumę a następnie obliczono iloczyn tych sum. Czy postępując w ten sposób można otrzymać iloczyn będący kwadratem liczby naturalnej?

4. Rozstrzygnij powyższy problem dla liczb naturalnych od 1 do 2014.

5. Ile jest par liczb całkowitych (x, y) , które spełniają równanie $15x^2 - 7y^2 = 9$?

6. Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = 25.$

7. Rozwiązać rebus $AB \cdot CD = 2015.$

8. Wyznaczyć liczbę naturalną n , dla której $n-1$ jest podzielne przez 15 i 1001 dzieli się przez $n+1$.

9. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 100 jako sumę pewnej liczby kolejnych liczb naturalnych?

10. Pewna liczba trzycyfrowa jest liczbą pierwszą i ma różne cyfry, przy czym jej cyfra jedności jest równa sumie cyfr dziesiątek i setek. Wyznaczyć cyfrę jedności tej liczby i podać przynajmniej jedną liczbę pierwszą o powyższych własnościach.

11. Punkty P , Q i R leżą odpowiednio na bokach BC , CA i AB trójkąta równobocznego ABC tak, że $|BP| : |PC| = |CQ| : |QA| = |AR| : |RB| = 1 : 2$. Wyznacz iloraz $\frac{P_{\triangle PQR}}{P_{\triangle ABC}}.$

12. Na boku BC trójkąta ABC obrano punkt L taki, że odcinek AL jest dwa razy dłuższy od środkowej CM . Ponadto okazało się, że $|\sphericalangle ALC| = 45^\circ$. Udowodnić, że odcinki AL i CM są prostopadłe.

13. W słowie *MATEMATYKA* zastąpić litery cyframi lub znakami dodawania bądź odejmowania tak, aby wartość otrzymanego wyrażenia była równa 2014. Oczywiście różnym literom odpowiadają różne litery lub znaki, a tym samym literom te same cyfry lub znaki. Podać przykład takiego wyrażenia.
14. W wypukłym czworokącie $ABCD$ przekątne są prostopadłe. Na bokach AD i CD obrano odpowiednio punkty M i N takie, że kąty ABN i CBM są proste. Udowodnić, że odcinki AC i MN są równoległe.
15. Na bokach AD i CD równoległoboku $ABCD$ jako na podstawach zbudowano na zewnątrz tego równoległoboku trójkąty równoboczne ADM i CDN . Udowodnić, że trójkąt BNM jest równoboczny.
16. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano punkty M i N tak, że $|\angle MAN| = 45^\circ$. Udowodnić, że odległość punktu A od prostej MN jest równa długości boku kwadratu.
17. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, punkty K i L są środkami odpowiednio boków BC i CD . Oblicz $\frac{P_{\triangle AKL}}{P_{ABCD}}$.
18. Danych jest sto liczb. Tworzymy sto nowych liczb powiększając każdą z danych liczb o 1. Okazało się, że suma kwadratów początkowych stu liczb oraz suma kwadratów nowych stu liczb są sobie równe. Jeszcze raz każdą z nowych liczb powiększamy o 1. Co można powiedzieć o sumie kwadratów trzeciej grupy stu liczb w stosunku do sumy kwadratów stu liczb z początkowej grupy?
19. Ojciec Wirgiliusz rozdał swoim dzieciom 47 czekoladek, przy czym każda dziewczynka otrzymała o jedną czekoladkę więcej od każdego chłopca. Następnie rozdał im 74 batoniki, przy czym każdy chłopiec dostał o jednego batonika więcej od każdej dziewczynki. Ile dzieci miał Ojciec Wirgiliusz?
20. Na tablicy napisano dwie liczby 2014 i 2015. Dwaj uczniowie Adam i Bartek grają w następującą grę: naprzemian podchodzą do tablicy - zaczyna Adam - i wykonują w czasie jednego podejścia jedną z następujących czynności:
- albo ścierają jedną z liczb wpisując w jej miejsce różnicę między startą liczbą i niezerową cyfrą jednej z liczb,
 - albo ścierają liczbę parzystą wpisując zamiast niej jej połowę.

Wygrywa ten z graczy, który pierwszy zapisze na tablicy liczbę jednocyfrową. Który z graczy Adam, czy Bartek ma strategię wygrywającą?

Życzymy udanych wakacji!

*Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej
w roku szkolnym 2015/2016!*