

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe
w dniu 10 stycznia 2015 r.

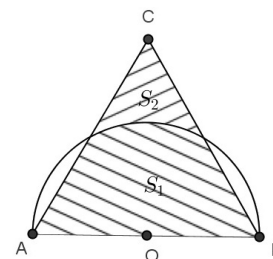
Tematyka: 1. Pole i obwód koła.

2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.

3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

1. Oblicz $49999989^2 - 50000011^2$.

2. W trójkącie równobocznym o boku długości 8 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 4. Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2 .

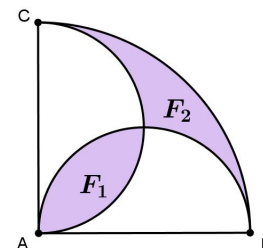


3. Uzasadnij, że dla każdej liczby x liczba $4x^2 - 4x + 11$ jest dodatnia.

4. Czy liczba $2^{2014} + 5^{20}$ jest liczbą pierwszą?

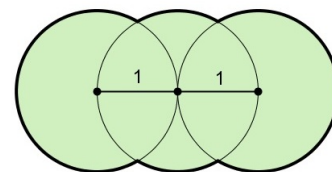
5. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$,
a następnie wyznacz jego wartość dla $a = \frac{3}{4}$, $b = -0,25$.

6. Porównaj pola oraz obwody figur F_1 i F_2 wiedząc, że $\triangle ABC$ jest prostokątny, $|AB| = |AC| = 4$, łuki CA i AB są półokreślami, zaś łuk BC jest ćwiartką okręgu o środku A .



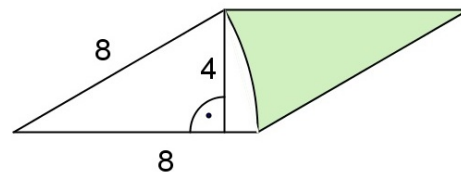
7. Czy liczba $2013 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right)$ jest kwadratem liczby naturalnej?

8. Z trzech okręgów o jednakowych promieniach równych 1 dwa są styczne zewnętrznie, a trzeci ma środek w punkcie styczności (rysunek obok). Oblicz pole i obwód otrzymanego w ten sposób obszaru.



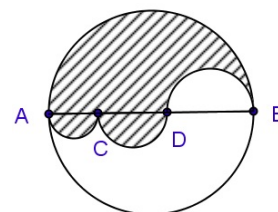
9. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb naturalnych n , m różnica kwadratów ich sumy oraz różnicy jest podzielna przez 4.

10. Uzasadnij, że dla każdej liczby x większej od 3 liczba $x^3 - 3x^2 - x + 3$ jest dodatnia.



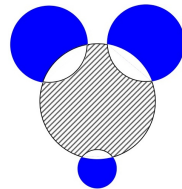
11. Oblicz pole zacieniowanego fragmentu rombu (rysunek obok).

12. Na średnicy AB koła obrano punkty C i D tak, że $|AC| = 6$, $|CD| = 8$, $|DB| = 10$. Na każdym z odcinków AC , CD i DB zbudowano półkole (patrz rysunek). Porównaj pola i obwody obszarów zacieniowanego i niezacieniowanego w kole.



13. Uzasadnij, że liczba $3^{16} - 1$ jest podzielna przez 64.

14. Niech P będzie polem obszaru zacieniowanego, a S polem obszaru zakreskowanego (część największego koła). Średnice kół są równe: 6, 4, 4, 2. Uzasadnij, że $P = S$.



15. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych:

a) $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab} \right)^{-1}$, $a = \sqrt{5} - 1$, $b = 1 + \sqrt{5}$,

b) $\left[\left(a + \frac{ab}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a \right) \right] : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, $a = -\frac{4}{5}$, $b = 0,6$,

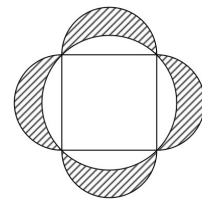
c) $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y} \right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2} \right)$, $a = 0,6$, $b = -0,4$.

16. Czy liczba: a) $2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2} \right)$,

b) $3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \right) \left(1 + \frac{2}{5} \right) \left(1 + \frac{2}{7} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2007} \right)$

jest liczbą pierwszą?

17. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu jest równa 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.



Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - „Liga Zadaniowa” - zad. 52 - 81 na str. 29 - 31 i zad. 211 - 239 na str. 91 - 95 oraz „Koło matematyczne w gimnazjum” str. 16 - 21 i str. 133 - 150.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „Koło matematyczne w gimnazjum” - zadania 593, 108, 595, 102, 267, 539 oraz przykład 10 ze strony 139 i przykład 11 na stronie 20.