

**Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową
w roku szkolnym 2014/15**

1. Rozwiązać rebus $AK \cdot BK = 2001$.
2. Wyznaczyć pięć liczb naturalnych, których suma jest równa 20, a iloczyn -420 .
3. Iloczyn pewnej liczby naturalnej przez sumę jej cyfr jest równy 2008. Wyznaczyć wszystkie liczby o tej własności.
4. Zapisać liczby $x = \frac{111110}{111111}$, $y = \frac{222221}{222223}$ i $z = \frac{333331}{333334}$ w porządku rosnącym.
5. Czy jest prawdą, że do każdej liczby naturalnej równej iloczynowi dwóch kolejnych liczb naturalnych można dopisać z prawej strony dwie cyfry tak, aby otrzymać liczbę będącą kwadratem liczby naturalnej?
6. Wśród wszystkich dodatnich liczb całkowitych o sumie cyfr równej 21 wyznaczyć najmniejszą taką liczbę i największą taką liczbę, o ile istnieją.
7. Zbiór liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ został podzielony na dwa podzbiory takie, że iloczyn liczb z pierwszego podzbioru jest podzielny przez iloczyn liczb z drugiego podzbioru, np. $\{1, 4, 8, 10, 9, 7\}$ i $\{2, 3, 6, 5\}$. Ile jest równy najmniejszy z możliwych ilorazów jakie można otrzymać przy takich podziałach?
8. Licznik i mianownik ułamka $\frac{m}{n}$ są liczbami naturalnymi takimi, że $m + n = 101$. Wiadomo, że $\frac{m}{n} \leq \frac{1}{3}$. Znaleźć najmniejszy taki ułamek.
9. Wiadomo, że $n - 1$ jest podzielne przez 15, a 1001 dzieli się przez $n + 1$. Wyznaczyć n .
10. Wyznaczyć najmniejsze liczby naturalne a , b , $b > 1$ takie, że $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$.
11. Dane są trzy liczby naturalne, których największy wspólny dzielnik jest równy 1. Wiadomo, że suma dowolnych dwóch z nich jest podzielna przez trzecią liczbę. Wyznacz te liczby.
12. Na okręgu umieścić 6 różnych liczb tak, aby każda z nich była równa iloczynowi dwóch sąsiednich.
13. Długości boków trójkąta ABC są liczbami naturalnymi. Długość jednego z boków jest równa 5, natomiast długość drugiego boku jest równa 1. Jaką długość ma trzeci bok tego trójkąta?
14. Tworzymy ciąg zapisany w wierszu składający się z 1999 liczb naturalnych według następujących zasad:
 - (1) Pierwszą liczbą jest 1.
 - (2) Każda liczba, oprócz pierwszej i ostatniej, jest równa sumie dwóch liczb sąsiednich.Ile jest równa ostatnia liczba w tym ciągu?

15. Dany jest trójkąt o bokach długości: 3 cm , 4 cm i 5 cm . Wyznaczyć pole zbioru, którego każdy punkt jest oddalony od danego trójkąta o nie więcej niż 1 cm .
Odległością punktu X od trójkąta ABC nazywamy najmniejszą z odległości między punktami X i P , gdzie P jest punktem należącym do trójkąta ABC .
16. W okrąg o średnicy 1 wpisano dziesięciokąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{10}$. Dla punktu P leżącego na tym okręgu wyznaczyć wartość wyrażenia $|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + \ldots + |PA_{10}|^2$.
17. W trójkącie prostokątnym ABC punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Niech N leży na boku CB , zaś M leży na boku AC tak, że $|\sphericalangle MON| = 90^\circ$. Udowodnić, że $|AC|^2 + |BN|^2 = |MN|^2$.
18. W trójkącie prostokątnym ABC wyznaczyć na przeciwprostokątnej AB punkt M taki, że długość odcinka KL , gdzie K jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AC , zaś L jest rzutem prostokątnym punktu M na bok BC , jest najmniejsza.
19. W kącie AOB przez punkt P konstrukcyjnie poprowadzić prostą m tak, by punkt P był środkiem odcinka KL , gdzie K jest punktem przecięcia prostej m z ramieniem OB , zaś L jest punktem przecięcia prostej m z ramieniem OA .
20. Kwadrat o wymiarach 5×5 podzielono na kwadraty jednostkowe. Wzdłuż linii podziału pociąć ten kwadrat na 7 różnych prostokątów (dwa prostokąty są różne, jeśli nie można nałożyć jednego na drugi tak, aby całkowicie się pokryły.)
21. W sali kinowej mamy 7 rzędów po 10 miejsc w każdym rzędzie. Na poranny seans przyszła grupa 10 osób. Ta sama grupa przyszła do tej sali na popołudniowy seans. Udowodnić, że w tej grupie znajdują się dwie osoby, które zarówno na porannym seansie jak i na wieczornym siedziały w tym samym rzędzie (niekoniecznie o tym samym numerze, np. być może rano obie siedziały w rzędzie o numerze 1, a wieczorem obie w rzędzie o numerze 5).

*Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2014/2015!*