

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum

Zadania przygotowawcze na I spotkanie etapu rejonowego
w dniu 14.11.2015 r.

Tematyka:

1. Wielkości wprost proporcjonalne.
2. Przekształcanie wzorów.
3. Równania i nierówności - zadania tekstowe.
4. Działania na potęgach i pierwiastkach.

1. Oblicz

$$\frac{\sqrt[4]{5\sqrt[3]{729} + 9\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{3\sqrt[4]{625} + 4\sqrt[4]{81}}}{\sqrt[3]{26 \cdot \sqrt[4]{256} + 7\sqrt[4]{81}}}.$$

2. Która z liczb, $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2012 \cdot 2014)^2$ czy 2014^{1007} , jest większa?

3. Pewną pracę Pan Andrzej wykonuje w ciągu 14 godzin, Pan Bartosz tę samą pracę wykonuje w ciągu 12 godzin, natomiast Pan Czesław wykonuje tę pracę w ciągu 18 godzin. W piątek o godzinie 8:00 Panowie Andrzej i Bartosz rozpoczęli tę pracę. O godzinie 9:00 przyszedł im z pomocą Pan Czesław. O godzinie 12:00 Panowie Bartosz i Czesław musieli zająć się innymi sprawami i zostawili Pana Andrzeja samego. Czy do godziny 15:00 Pan Andrzej zdoła zakończyć tę pracę?

4. Oblicz, ile jest równy podany iloczyn oraz oblicz sumę cyfr tego iloczynu:

a) $\underbrace{(66 \dots 6)}_{10 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{(33 \dots 3)}_{10 \text{ cyfr}},$ b) $\underbrace{(44 \dots 4)}_{20 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{(55 \dots 5)}_{10 \text{ cyfr}}.$

5. Z miast A i B wyruszyły jednocześnie dwa samochody jadąc naprzeciw siebie, każdy ze swoją stałą prędkością. W chwili spotkania okazało się, że pierwszy samochód (wyruszający z miasta A) przebył drogę o 60 km dłuższą niż drugi samochód (startujący z miasta B). Pierwszy samochód przybył do miasta B po 5 godzinach jazdy, drugi zaś przybył do miasta A po $7\frac{1}{2}$ godzinach jazdy. Jaka jest odległość między miastami A i B ?

6. Ustaw w porządku rosnącym następujące trzy liczby:

$$\frac{134}{403}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2008 \cdot 2011} + \frac{1}{2011 \cdot 2014}.$$

7. Mianownik ułamka jest o 2015 większy od licznika tego ułamka. Ułamek ten po skróceniu przyjął postać $\frac{3}{16}$. Wyznacz postać tego ułamka przed skróceniem.

8. Która z liczb jest większa, $\sqrt[3]{\frac{2013}{2014}}$ czy $\sqrt[3]{\frac{2014}{2015}}$?

9. Piotr wykonuje pewną pracę w ciągu 10 godzin, Zbyszek wykonuje tę samą pracę w ciągu 12 godzin, zaś Mirek wykonuje tę pracę w ciągu 8 godzin. Piotr, Zbyszek i Mirek rozpoczynają wykonywać razem tę pracę o godz. 8:00 rano. Czy wykonają ją przed przerwą obiadową, która zaczyna się o godz. 12:00?

10. Panowie Tadeusz i Tomasz pokonują, każdy ze swoją stałą prędkością, drogę łączącą miejscowości A i B . Wyruszają jednocześnie, przy czym pan Tadeusz rusza z miejscowości A , a pan Tomasz z miejscowości B . Po spotkaniu tych panów w czasie wędrowki pan Tadeusz doszedł do celu w ciągu 4 godzin od momentu spotkania, a pan Tomasz w ciągu 2 godzin i 15 minut od momentu spotkania. Ile czasu zajęła cała wędrowka każdemu z nich?

11. Ustaw w porządku rosnącym liczby: 2^{90} , 3^{60} , 5^{45} , 8^{45} , 16^{30} .
12. Rozwiąż równanie: $0,16 : \left[\frac{(0,2x + 0,6) \cdot \frac{2}{3}}{0,125} - 2,4 \right] = 0,04$.
13. W dwóch beczkach znajduje się łącznie 80 litrów wody. Jeżeli z pierwszej beczki przelalibyśmy do drugiej tyle, aby jej zawartość w drugiej beczce podwoiła się, a następnie z drugiej przelalibyśmy do pierwszej tyle, aby jej zawartość w pierwszej beczce podwoiła się, to w obu beczkach byłoby tyle samo wody. Ile jest wody w każdej beczce?
14. Na stadionie, którego bieżnia ma 400 m długości, odbył się bieg na 10 km. Zwycięzca ukończył bieg po 30 minutach, a ostatni zawodnik po 32 minutach. Po ilu okrążeniach zwycięzca zdublował ostatniego przeciwnika? Przyjmij, że każdy zawodnik biegł ze stałą prędkością.
15. Oblicz a) $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33 \dots 3}_{2015}$, b) $4 + 44 + 444 + \dots + \underbrace{44 \dots 4}_{2015}$,
c) $5 + 55 + 555 + 5555 + \dots + \underbrace{55 \dots 5}_{2015}$.
16. Zbadaj, która z liczb $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$ czy 10^{55} jest większa?
17. Oblicz: a) $\frac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$, b) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$.
18. Oblicz: a) $\frac{\sqrt[5]{3125} \cdot \sqrt[4]{6561} \cdot \sqrt{729}}{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{15625} \cdot \sqrt{324}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{729}} \cdot \sqrt{48 \cdot 243}$,
b) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$, c) $\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27} + 15\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{10\sqrt[4]{256} + 8\sqrt[4]{81}}$,
d) $\frac{\sqrt[4]{15 \cdot \sqrt[3]{27} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}}}{\sqrt[3]{26 \cdot \sqrt[4]{256} + 7 \cdot \sqrt[4]{81}}}$, e) $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{729} + 9\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{3\sqrt[4]{625} + 4\sqrt[4]{81}}$.
19. Zapytano rybaka, ile waży złowiona przez niego ryba. Rybak odpowiedział: $\frac{2}{3}$ kg i jeszcze 2 razy po $\frac{2}{5}$ swojej masy. Ile waży ryba?
20. Dziadek i babcia mają razem 140 lat. Po ile lat ma każde z nich, jeżeli dziadek ma dwa razy tyle lat, ile babcia miała wtedy, gdy dziadek miał tyle lat, ile ma teraz babcia?
21. Oblicz:
$$\frac{666666 \cdot 66666666}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} - \frac{777777 \cdot 7777777}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}.$$
22. Uprość ułamek $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}.$
23. Czy zachodzi równość $\frac{2 \cdot 2014}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2014}} = 2015?$
24. Uzasadnij, że liczba $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2014$ jest podzielna przez 2015.
25. Udowodnij, że liczba $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2011 \cdot 2013 \cdot 2015 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2012 \cdot 2014 \cdot 2016$ jest podzielna przez 2017.

Uwaga. W przygotowaniach do I spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań - „Liga Zadaniowa” - str. 25, 26 i „Koło matematyczne w gimnazjum” - str. 47 - 51.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „Koło matematyczne w gimnazjum” - zadania 48, 101, 116, 246, 257 oraz przykład 4 ze strony 46. Ponadto Prezent wakacyjny dla gimnazjum z roku 2014/15 zadania 1c, 1f i 2.