

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY
II spotkanie konkursowe – 9 stycznia 2016 r.

Zadania konkursowe

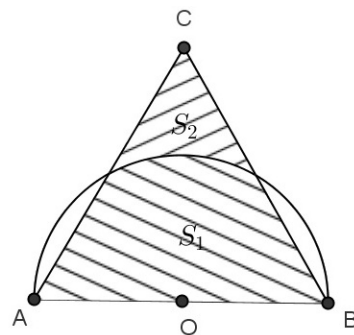
1. Udowodnij, że liczba $3^{32} - 1$ jest podzielna przez 640.
2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + 9 \geq ab + 3a + 3b$.

3. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\left((a-b)^{-2} + (a+b)^{-2}\right) : \left(\frac{a^2 + b^2}{a^4 - b^4}\right)^2,$$

następnie wyznacz jego wartość dla $a = 1 - \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3} - 2$ i rozstrzygnij, czy jest ona większa niż 5.

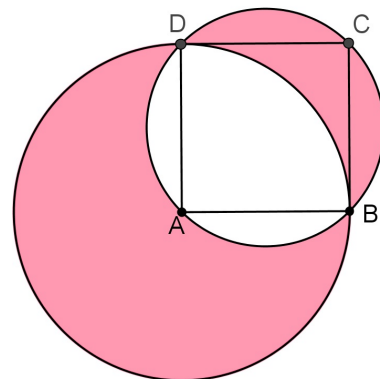
4. W trójkącie równobocznym o boku długości 10 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 5 (patrz rysunek). Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2 .



5. Wiedząc, że liczba $a + \frac{1}{a}$ jest całkowita, uzasadnij, że liczby

$$a^2 + \frac{1}{a^2}, a^3 + \frac{1}{a^3} \text{ i } a^4 + \frac{1}{a^4} \text{ są całkowite.}$$

6. Na kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 opisano okrąg, a następnie wykreślono okrąg o środku w punkcie A i promieniu AB . Oblicz pole i obwód figury zacieniowanej na rysunku.



Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.