

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe w dniu 2 kwietnia 2016 r.

Tematyka: 1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.

2. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. Wyrażenie $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b}\right) : \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)\right]$ doprowadź do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = \sqrt{3} - 1$ i $b = 1 + \sqrt{3}$.

2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$4a^2 + b^2 + 9c^2 \geq 2ab + 6ac + 3bc.$$

3. Czy liczba $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ jest większa od 1,1?

4. Wyznaczyć wszystkie równoległoboki, których trzy wierzchołki znajdują się w podanych punktach: $(2, 1)$, $(4, 6)$, $(9, 4)$. Czy są wśród nich prostokąty lub romby?

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ wiadomo, że $|\angle DAB| = 90^\circ$, $|\angle DBC| = 90^\circ$ oraz $|DB| = 12$ i $|DC| = 15$. Wyznaczyć odległość między środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D, A, B oraz środkiem okręgu przechodzącego przez punkty B, C, D .

6. W trapezie $ABCD$ długość podstawy AB jest równa 16, a długość podstawy CD jest równa 8. Obliczyć pole i obwód tego trapezu wiedząc, że przekątne trapezu są dwusiecznymi kątów DAB i ABC .

7. Udowodnić, że w trójkącie równoramiennym suma odległości dowolnego punktu jego podstawy od ramion jest równa wysokości tego trójkąta opuszczonej na ramię.

8. Udowodnić, że jeśli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(2b + 2c - a)$.

9. Czy liczba $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025} + \sqrt{2023}}$ jest liczbą całkowitą?

10. Punkt $(-1, -1)$ jest środkiem rombu, którego pole jest równe 8. Jednym z wierzchołków rombu jest punkt $(-2, 0)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego rombu.

11. Oblicz $\sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2014\sqrt{1 + 2013\sqrt{1 + 2012 \cdot 2010}}}}$.

12. Trójkąt ma boki długości 32, 24 i 40. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz odległość między środkami tych okręgów.

13. Środkiowe BD i CF trójkąta ABC są prostopadłe oraz $|BD| = 9 \text{ cm}$ i $|CF| = 12 \text{ cm}$. Wyznaczyć:
(a) pole trójkąta ABC , (b) długości boków trójkąta ABC .

14. Obliczyć pole trapezu, w którym długości podstaw są równe 10 cm i 30 cm, a długości przekątnych są równe 24 cm i 32 cm.

15. W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten kąt w stosunku $1 : 2$. Oblicz pole trójkąta, jeśli długość tej środkowej wynosi 10 cm .
16. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są w stosunku $3:4$, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm . Obliczyć: (a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, (b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie, (c) długości środkowych tego trójkąta.
17. Oblicz pole sześciokąta, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają tę samą miarę, a boki mają kolejno długości $2, 4, 2, 4, 2, 4$.
18. W równoległoboku długości boków wynoszą 5 cm i 6 cm . Oblicz długości przekątnych równoległoboku wiedząc, że symetralna dłuższego boku przechodzi przez wierzchołek równoległoboku.
19. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości $2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}$ w podanej kolejności.
20. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.
21. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.
22. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD . Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , zaś r_1 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_2 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD . Udowodnić, że $r + r_1 + r_2 = |CD|$.
23. Bok prostokąta ma długość 24 cm , a jego przekątna ma długość 26 cm . Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - „*Liga Zadaniowa*” - zad. 51 - 87 na str. 74 - 77 i zad. 276 - 310 na str. 101 - 105 oraz „*Koło matematyczne w gimnazjum*”.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „*Koło matematyczne w gimnazjum*” - zadania 105, 104, 471, 499, przykład 8 ze strony 19, przykład 11 ze strony 124 i przykład 10 ze strony 123. „*Liga Zadaniowa*”, Rozdział 4 Geometria, zadania 64 na str. 75, 73 na str. 76 oraz 136 na str. 83.