

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum
Zadania przygotowawcze na I spotkanie etapu rejonowego
w dniu 19.11.2016 r.

Tematyka:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. Wielkości wprost proporcjonalne. | 3. Równania i nierówności - zadania tekstowe. |
| 2. Przekształcanie wzorów. | 4. Działania na potęgach i pierwiastkach. |

1. Oblicz $\frac{\sqrt[3]{43 \cdot \sqrt[4]{81}} + 120\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{15 \cdot \sqrt[3]{27}} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}} - \sqrt{\sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{256}}.$
2. Czy liczba $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2015}$ jest większa od $\frac{1}{6}$?
3. Rozstrzygnij, czy liczba $4 + 44 + 444 + \dots + \underbrace{44 \dots 4}_{11 \text{ cyfr}}$ jest podzielna przez 12.
4. Dwaj robotnicy wykonali wspólnie pewną pracę. Pierwszy z nich, pracując samodzielnie, wykonałby tę pracę w czasie 4 razy dłuższym, a drugi w czasie o 5 dni dłuższym. W ciągu ilu dni wykonali oni tę pracę razem?
5. Z miasta A wyruszył rowerzysta i jechał do miasta B ze stałą prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kiedy przejechał 12 km, dogonił go samochód, który z miasta A wyruszył 20 minut po rowerzysty i jechał także ze stałą prędkością. Po przejechaniu kolejnych 25 km rowerzysta spotkał ten sam samochód powracający już z miasta B , ze stałą prędkością, taką samą jak poprzednio. Wiadomo, że samochód zatrzymał się na kwadrans w mieście B . Oblicz odległość między miastami A i B .
6. Która z liczb $\frac{2^{2012} + 2^{2013} + \dots + 2^{2016} + 2015}{2^{2011} + 2^{2012} + \dots + 2^{2015} + 2015}$, czy $\frac{2^{2011} + 2^{2012} + \dots + 2^{2015} + 2015}{2^{2010} + 2^{2011} + \dots + 2^{2014} + 2015}$ jest większa?
7. Pewną pracę Pan Andrzej wykonuje w ciągu 14 godzin, Pan Bartosz tę samą pracę wykonuje w ciągu 12 godzin, natomiast Pan Czesław wykonuje tę pracę w ciągu 18 godzin. W piątek o godzinie 8:00 Panowie Andrzej i Bartosz rozpoczęli tę pracę. O godzinie 9:00 przyszedł im z pomocą Pan Czesław. O godzinie 12:00 Panowie Bartosz i Czesław musieli zająć się innymi sprawami i zostawili Pana Andrzeja samego. Czy do godziny 15:00 Pan Andrzej zdoła zakończyć tę pracę?
8. Z miast A i B wyruszyły jednocześnie dwa samochody jadąc naprzeciw siebie, każdy ze swoją stałą prędkością. W chwili spotkania okazało się, że pierwszy samochód (wyruszający z miasta A) przebył drogę o 60 km dłuższą niż drugi samochód (startujący z miasta B). Pierwszy samochód przybył do miasta B po 5 godzinach jazdy, drugi zaś przybył do miasta A po $7\frac{1}{2}$ godzinach jazdy. Jaka jest odległość między miastami A i B ?
9. Ustaw w porządku rosnącym następujące trzy liczby:
$$\frac{134}{403}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2008 \cdot 2011} + \frac{1}{2011 \cdot 2014}.$$
10. Ustaw w porządku rosnącym liczby: $2^{90}, 3^{60}, 5^{45}, 8^{45}, 16^{30}.$
11. Wyznacz liczbę wszystkich dzielników każdej z liczb: $5^5, 3^2 \cdot 5^4, 3^7 + 5^2 \cdot 3^5 + 45 \cdot 3^3, 19 \cdot 11 \cdot 20 \cdot 16.$
12. Po skróceniu ułamka
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30}{7 \cdot 3^{17} + 5 \cdot 3^{16} + 4 \cdot 3^{15}}$$
otrzymano ułamek nieskracalny. Jaki jest mianownik tego nieskracalnego ułamka?

13. Rozwiąż równanie: $0,16 : \left[\frac{(0,2x + 0,6) \cdot \frac{2}{3}}{0,125} - 2,4 \right] = 0,04$.
14. Mianownik ułamka jest o 2015 większy od licznika tego ułamka. Ułamek ten po skróceniu przyjął postać $\frac{3}{16}$. Wyznacz postać tego ułamka przed skróceniem.
15. Na stadionie, którego bieżnia ma 400 m długości, odbył się bieg na 10 km. Zwycięzca ukończył bieg po 30 minutach, a ostatni zawodnik po 32 minutach. Po ilu okrążeniach zwycięzca zdublował ostatniego przeciwnika? Przyjmij, że każdy zawodnik biegł ze stałą prędkością.
16. Zapytano rybaka, ile waży złowiona przez niego ryba. Rybak odpowiedział: $\frac{2}{3}$ kg i jeszcze 2 razy po $\frac{2}{5}$ swojej masy. Ile waży ryba?
17. Dziadek i babcia mają razem 140 lat. Po ile lat ma każde z nich, jeżeli dziadek ma dwa razy tyle lat, ile babcia miała wtedy, gdy dziadek miał tyle lat, ile ma teraz babcia?
18. Oblicz a) $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{2016}$, b) $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33 \dots 3}_{2016}$.
19. Oblicz, ile jest równy podany iloczyn oraz oblicz sumę cyfr tego iloczynu:
a) $\underbrace{(66 \dots 6)}_{10 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{(33 \dots 3)}_{10 \text{ cyfr}}$, b) $\underbrace{(44 \dots 4)}_{20 \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{(55 \dots 5)}_{10 \text{ cyfr}}$.
20. Która z liczb, $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2012 \cdot 2014)^2$ czy 2014^{1007} , jest większa?
21. Zbadaj, która z liczb $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$ czy 10^{55} jest większa?
22. Wiedząc, że $\frac{a}{5a+b} = \frac{1}{2015}$, oblicz $\frac{10b}{19b+2010a}$.
23. Z równości $\frac{a}{\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b} = \frac{c}{b}$ wyznacz zmienną b , następnie oblicz wartość wyrażenia $\frac{b}{a \cdot c}$ dla $a = 2 - \sqrt{3}$ i $c = 4 - 3\sqrt{3}$.
24. Oblicz: a) $\frac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$, b) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$.
25. Oblicz: a) $\frac{\sqrt[5]{3125} \cdot \sqrt[4]{6561} \cdot \sqrt{729}}{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{15625} \cdot \sqrt{324}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{729}} \cdot \sqrt{48 \cdot 243}$, b) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$,
c) $\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27}} + 15\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{10\sqrt[4]{256}} + 8\sqrt[4]{81}$, d) $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{729}} + 9\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{3\sqrt[4]{625}} + 4\sqrt[4]{81}$.
26. Która z liczb jest większa, $\sqrt[3]{\frac{2014}{2015}}$ czy $\sqrt[3]{\frac{2015}{2016}}$?
27. Oblicz:
$$\frac{666666 \cdot 6666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} - \frac{777777 \cdot 7777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}$$
28. Uprość ułamek $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}$.
29. Czy zachodzi równość $\frac{2 \cdot 2015}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2015}} = 2016$?

Uwaga. W przygotowaniach do I spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań - „Liga Zadaniowa” - str. 25, 26 i „Koło matematyczne w gimnazjum” - str. 47 - 51.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „Koło matematyczne w gimnazjum” - zadania 47, 103, 118, 247, 256, 258 oraz przykład 3 ze strony 46.