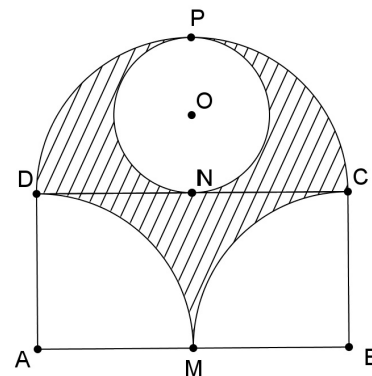


Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

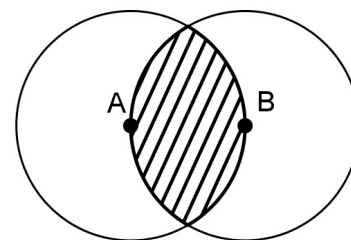
Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY
II spotkanie konkursowe – 21 stycznia 2017 r.

Zadania konkursowe

1. Długości boków prostokąta $ABCD$ wynoszą 10 cm i 5 cm. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Łuki MC i MD są ćwiartkami okręgów o środkach w punktach A i B . Łuk CD jest półokręgiem, zaś okrąg o środku O jest styczny do tego półokręgu w punkcie P , a do odcinka CD w punkcie N (patrz rysunek). Oblicz pole i obwód zakreskowanego obszaru.



2. Czy liczba $2017 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2016^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2017^2}\right)$ jest liczbą pierwszą?
3. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left[\left(\frac{x^2 + y^2}{x - y} - \frac{x^2 - y^2}{x + y} \right) : \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2} + \frac{x + y}{x^2 - y^2} \right) \right] \cdot \frac{y^2 - xy + x^2}{2xy}$, następnie wyznacz jego wartość dla $x = \sqrt{2} - 1$, $y = \sqrt{2} + 1$.
4. Rozstrzygnij, czy liczba $2^{30} + 5^{2016}$ jest liczbą pierwszą.
5. Dane są dwa okręgi o jednakowych promieniach równych 4 takie, że środek każdego z tych okręgów leży na drugim okręgu (patrz rysunek). Oblicz pole i obwód zakreskowanego obszaru.
6. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b zachodzi nierówność $a^2 + b^2 \geq 2(a + b - 1)$.



Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.