

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe w dniu 18 marca 2017 r.

Tematyka: 1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.
2. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają równe długości i wynoszą po 10 cm, a przedłużenia ramion trapezu przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód i pole tego trapezu.
2. Oblicz $\sqrt{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2014}} \right)$.
3. Punkty $A(1, 5)$ i $B(-2, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, zaś punkt $S(3, 3)$ jest jego środkiem. Znajdź pozostałe wierzchołki tego równoległoboku i oblicz jego obwód.
4. Oblicz $\sqrt{1 + 2017\sqrt{1 + 2016\sqrt{1 + 2015 \cdot 2013}}}$.
5. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są w stosunku 4:5, a przeciwprostokątna ma długość 41 cm. Oblicz:
 - a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
 - b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
 - c) długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego w tym trójkącie.
6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb a, b prawdziwa jest nierówność $5a^2 + 4b^2 + 1 \geq 4a(1 + b)$.
7. Wyrażenie $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b} \right) : \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right) \right]$ doprowadź do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = \sqrt{3} - 1$ i $b = 1 + \sqrt{3}$.
8. Udowodnić, że dla dowolnych liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność $4a^2 + b^2 + 9c^2 \geq 2ab + 6ac + 3bc$.
9. Czy liczba $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ jest większa od 1,1?
10. W czworokącie wypukłym $ABCD$ wiadomo, że $|\angle DAB| = 90^\circ$, $|\angle DBC| = 90^\circ$ oraz $|DB| = 12$ i $|DC| = 15$. Wyznaczyć odległość między środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D, A, B oraz środkiem okręgu przechodzącego przez punkty B, C, D .
11. W trapezie $ABCD$ długość podstawy AB jest równa 16, a długość podstawy CD jest równa 8. Obliczyć pole i obwód tego trapezu wiedząc, że przekątne trapezu są dwusiecznymi kątów DAB i ABC .

12. Udowodnić, że w trójkącie równoramiennym suma odległości dowolnego punktu jego podstawy od ramion jest równa wysokości tego trójkąta opuszczonej na ramię.
13. Udowodnić, że jeśli a , b , c są liczbami rzeczywistymi, to $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(2b + 2c - a)$.
14. Punkt $(-1, -1)$ jest środkiem rombu, którego pole jest równe 8. Jednym z wierzchołków rombu jest punkt $(-2, 0)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego rombu.
15. Trójkąt ma boki długości 32, 24 i 40. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz odległość między środkami tych okręgów.
16. Środkowe BD i CF trójkąta ABC są prostopadłe oraz $|BD| = 9$ cm i $|CF| = 12$ cm. Wyznaczyć:
(a) pole trójkąta ABC , (b) długości boków trójkąta ABC .
17. W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten kąt w stosunku 1 : 2. Oblicz pole trójkąta, jeśli długość tej środkowej wynosi 10 cm.
18. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$ w podanej kolejności.
19. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a , b zachodzi nierówność: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.
20. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.
21. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD . Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , zaś r_1 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_2 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD . Udowodnić, że $r + r_1 + r_2 = |CD|$.
22. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - „*Liga Zadaniowa*” - zad. 51 - 87 na str. 74 - 77 i zad. 276 - 310 na str. 101 - 105 oraz „*Koło matematyczne w gimnazjum*”.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „*Koło matematyczne w gimnazjum*” - zadania 107, 108, 483, 505, przykład 3 ze strony 17, przykład 6 ze strony 121 i przykład 5 ze strony 120. „*Liga Zadaniowa*”, Rozdział 4 Geometria, zadania 63 na str. 75, 76 na str. 76 oraz 137 na str. 83.