

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY
III spotkanie konkursowe – 1 kwietnia 2017 r.

Zadania konkursowe

1. Punkty $B = (3, -4)$ i $C = (4, 3)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Początek układu współrzędnych jest środkiem tego prostokąta. Znajdź pozostałe wierzchołki tego prostokąta i oblicz jego pole oraz obwód.
2. Wyznaczyć pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary, zaś kolejne boki mają długości: $1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$.
3. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przyprostokątną na odcinki o długościach 3 i 5, przy czym odcinek o długości 3 leży przy kącie prostym. Oblicz:
 - a) długości boków tego trójkąta,
 - b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
 - c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
4. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) : (a + b) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) : (a - b) \right] \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2},$$

a następnie oblicz jego wartość dla $a = 5 + \sqrt{3}$ i $b = 2\sqrt{3} + 4$ oraz rozstrzygnij, czy wartość ta jest większa od $\frac{1}{20}$.

5. Długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi, przy czym najkrótszy z nich ma długość co najmniej 4 cm. Wysokość opuszczona na bok o średniej długości dzieli ten bok na dwa odcinki. Oblicz różnicę długości tych odcinków.
6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{1}{ab}.$$

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu - 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.