

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum

Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową
w roku szkolnym 2016/17

1. Podaj przykład trzech kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest podzielna przez kwadrat liczby naturalnej większej niż 1.
2. Ustawić w ciąg wszystkie liczby naturalne od 1 do 100 tak, aby różnice między dwiema kolejnymi liczbami były równe 2 lub 3. (Zawsze od liczby większej odejmujemy liczbę mniejszą.)
3. Na tablicy piszemy kolejno liczby: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ... Każda liczba oprócz pierwszej jest sumą liczby poprzedzającej ją i sumy jej cyfr. Czy na tablicy pojawi się liczba 200120022003?
4. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $169^{13} + 16^{256}$ przez liczbę 85.
5. Wyznaczyć dwie liczby naturalne dwucyfrowe, jeśli wiadomo, że suma pozostałych liczb dwucyfrowych jest 50 razy większa od jednej z tych liczb.
6. Czy można znaleźć cztery różne liczby naturalne takie, by suma dowolnych dwóch z nich była potęgą liczby 3?
7. Czy istnieją takie cyfry a i b ($a < b$), dla których różnica $\underbrace{aa\dots a}_{b \text{ cyfr}} - \underbrace{bb\dots b}_{a \text{ cyfr}}$ jest liczbą pierwszą?
8. Czy można znaleźć pięć różnych liczb naturalnych, dla których iloczyn dwóch największych z nich jest równy sumie tych pięciu liczb?
9. Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych a , b , dla których zachodzi równość

$$NWW(a, b) - NWD(a, b) = \frac{1}{5}ab.$$

10. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb $2^{68} - 1$ i $2^{91} - 1$.
11. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, liczba $n^4 + 4$ jest liczbą złożoną.
12. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych m , n , które spełniają równanie $mn - n - m = 2017$.
13. Czy istnieje liczba naturalna n taka, że zapis dziesiętny sumy $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$ kończy się układem cyfr 2017?
14. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne a , dla których dwa spośród poniższych zdań są prawdziwe, a jedno jest fałszywe:
 - (a) $a + 41$ jest kwadratem liczby naturalnej.
 - (b) $a - 21$ jest podzielne przez 10.
 - (c) $a + 48$ jest kwadratem liczby naturalnej.

15. Udowodnić, że jeżeli $a > b > c$, to zachodzi nierówność

$$a + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq c + 4.$$

16. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

17. Niech P będzie środkiem boku AB w kwadracie $ABCD$ i niech E będzie rzutem prostopadłym wierzchołka C na prostą DP . Wyznacz miarę kąta AEP .

18. Niech a, b będą przyprostokątnymi, a c przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym, zaś h wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną. Udowodnić, że $a + b < c + h$.

19. W wypukłym czworokącie $ABCD$ kąty BAD i ABC mają równe miary. Ponadto wiadomo, że $|BC| = 1$, $|AD| = 3$. Udowodnić, że długość boku CD jest większa niż 2.

20. Niech AM będzie środkową w trójkącie ABC . Udowodnić, że $|AM| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |AC|)$.

*Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2016/2017!*