

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum
Zadania przygotowawcze na I spotkanie etapu rejonowego
w dniu 18 listopada 2017 r.

Tematyka:

1. Wielkości wprost proporcjonalne. 3. Równania i nierówności – zadania tekstowe.
2. Przekształcanie wzorów. 4. Działania na potęgach i pierwiastkach.

1. Oblicz:
$$\frac{\sqrt{9 \cdot \sqrt[4]{625}} - 4 \cdot \sqrt[3]{729}}{\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27}} + 15\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{10\sqrt[4]{256}} + 8\sqrt[4]{81}}$$
2. Czy liczba $\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2017}$ jest większa od $\frac{1}{11}$?
3. Pewną pracę Pan Dariusz wykonuje w ciągu 18 godzin, Pan Eryk tę samą pracę wykonuje w ciągu 15 godzin, natomiast Pan Franciszek wykonuje tę pracę w ciągu 24 godzin. W piątek o godzinie 8:00 Panowie Dariusz i Eryk rozpoczęli tę pracę. O godzinie 9:00 przyszedł im z pomocą Pan Franciszek. O godzinie 12:00 Panowie Eryk i Franciszek musieli zająć się innymi sprawami i zostawili Pana Dariusza samego. Czy do godziny 15:00 Pan Dariusz zdoła zakończyć tę pracę?
4. Oblicz:
$$\frac{14^{42} \cdot 5^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} - 10^{40} \cdot 7^{41}}$$
5. W dwóch beczkach znajduje się łącznie 80 litrów wody. Jeżeli z pierwszej beczki przelalibyśmy do drugiej tyle wody, aby jej zawartość w drugiej beczce podwoiła się, a następnie z drugiej beczki przelalibyśmy do pierwszej tyle wody, aby jej zawartość w pierwszej beczce podwoiła się, to w obu beczkach byłoby tyle samo wody. Ile jest wody w każdej beczce?
6. Która z liczb, $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2014 \cdot 2016)^2$ czy 2016^{1008} , jest większa?
7. a) Rozstrzygnij, czy liczba $4 + 44 + 444 + \dots + \underbrace{44 \dots 4}_{11 \text{ cyfr}}$ jest podzielna przez 12.
- b) Rozstrzygnij, czy liczba $5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55 \dots 5}_{30 \text{ cyfr}}$ jest podzielna przez 15.
8. Z miasta A wyruszył rowerzysta i jechał do miasta B ze stałą prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kiedy przejechał 12 km, dogonił go samochód, który z miasta A wyruszył 20 minut po rowerzyście i jechał także ze stałą prędkością. Po przejechaniu kolejnych 25 km rowerzysta spotkał ten sam samochód powracający już z miasta B , ze stałą prędkością, taką samą jak poprzednio. Wiadomo, że samochód zatrzymał się na kwadrans w mieście B . Oblicz odległość między miastami A i B .
9. Dwaj robotnicy wykonali wspólnie pewną pracę. Pierwszy z nich, pracując samodzielnie, wykonałby tę pracę w czasie 4 razy dłuższym, a drugi w czasie o 5 dni dłuższym. W ciągu ilu dni wykonali oni tę pracę razem?
10. Z miast A i B wyruszyły jednocześnie dwa samochody jadąc naprzeciw siebie, każdy ze swoją stałą prędkością. W chwili spotkania okazało się, że pierwszy samochód (wyruszający z miasta A) przebył drogę o 60 km dłuższą niż drugi samochód (startujący z miasta B). Pierwszy samochód przybył do miasta B po 5 godzinach jazdy, drugi zaś przybył do miasta A po $7\frac{1}{2}$ godzinach jazdy. Jaka jest odległość między miastami A i B ?
11. Ustaw w porządku rosnącym następujące trzy liczby:

$$\frac{134}{403}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2008 \cdot 2011} + \frac{1}{2011 \cdot 2014}.$$

12. Ustaw w porządku rosnącym liczby: 2^{90} , 3^{60} , 5^{45} , 8^{45} , 16^{30} .
13. Wyznacz liczbę wszystkich dzielników każdej z liczb: 5^5 , $3^2 \cdot 5^4$, $3^7 + 5^2 \cdot 3^5 + 45 \cdot 3^3$, $19 \cdot 11 \cdot 20 \cdot 16$.
14. Po skróceniu ułamka $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30}{7 \cdot 3^{17} + 5 \cdot 3^{16} + 4 \cdot 3^{15}}$ otrzymano ułamek nieskracalny. Jaki jest mianownik tego nieskracalnego ułamka?
15. Rozwiąż równanie: $0,16 : \left[\frac{(0,2x + 0,6) \cdot \frac{2}{3}}{0,125} - 2,4 \right] = 0,04$.
16. Na stadionie, którego bieżnia ma 400 m długości, odbył się bieg na 10 km. Zwycięzca ukończył bieg po 30 minutach, a ostatni zawodnik po 32 minutach. Po ilu okrążeniach zwycięzca zdublował ostatniego przeciwnika? Przyjmij, że każdy zawodnik biegł ze stałą prędkością.
17. Zapytano rybaka, ile waży złowiona przez niego ryba. Rybak odpowiedział: $\frac{2}{3}$ kg i jeszcze 2 razy po $\frac{2}{5}$ swojej masy. Ile waży ryba?
18. Dziadek i babcia mają razem 140 lat. Po ile lat ma każde z nich, jeżeli dziadek ma dwa razy tyle lat, ile babcia miała wtedy, gdy dziadek miał tyle lat, ile ma teraz babcia?
19. Oblicz: a) $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{2016 \text{ cyfr}}$, b) $4 + 44 + 444 + \dots + \underbrace{44\dots4}_{2015 \text{ cyfr}}$.
20. Oblicz, ile jest równy podany iloczyn oraz oblicz sumę cyfr tego iloczynu:
 a) $(\underbrace{66\dots6}_{10 \text{ cyfr}}) \cdot (\underbrace{33\dots3}_{10 \text{ cyfr}})$, b) $(\underbrace{44\dots4}_{20 \text{ cyfr}}) \cdot (\underbrace{55\dots5}_{10 \text{ cyfr}})$.
21. Zbadaj, która z liczb $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$ czy 10^{55} jest większa.
22. Wiedząc, że $\frac{a}{5a+b} = \frac{1}{2015}$, oblicz $\frac{10b}{19b+2010a}$.
23. Z równości $\frac{a}{\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b} = \frac{c}{b}$ wyznaczn zmienną b , następnie oblicz wartość wyrażenia $\frac{b}{a \cdot c}$ dla $a = 2 - \sqrt{3}$ i $c = 4 - 3\sqrt{3}$.
24. Oblicz: a) $\frac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$, b) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$.
25. Oblicz: a) $\frac{\sqrt[5]{3125} \cdot \sqrt[4]{6561} \cdot \sqrt{729}}{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{15625} \cdot \sqrt{324}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{729}} \cdot \sqrt{48 \cdot 243}$,
 b) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$, c) $\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27} + 15\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{10\sqrt[4]{256} + 8\sqrt[4]{81}}$,
 d) $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{729} + 9\sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{3\sqrt[4]{625} + 4\sqrt[4]{81}}$, e) $\frac{\sqrt[3]{43 \cdot \sqrt[4]{81} + 120\sqrt[4]{625}}}{\sqrt[4]{15 \cdot \sqrt[3]{27} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}}} - \sqrt{\sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{256}}$.
26. Która z liczb, $\sqrt[3]{\frac{2014}{2015}}$ czy $\sqrt[3]{\frac{2015}{2016}}$, jest większa?
27. Uprość ułamek $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}$.
28. Czy zachodzi równość $\frac{2 \cdot 2016}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2016}} = 2017$?

Uwaga. W przygotowaniach do I spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań: „Liga Zadaniowa” – str. 25, 26 i „Koło matematyczne w gimnazjum” – str. 47-51.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki: „Koło matematyczne w gimnazjum” – zadania 48, 106, 116, 232, 256, 257 oraz przykład 4 ze strony 46.