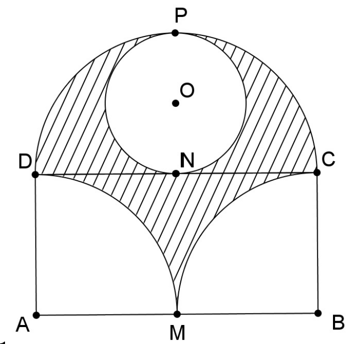
Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe
w dniu 20 stycznia 2018 r.

Tematyka: 1. Pole i obwód koła.
2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

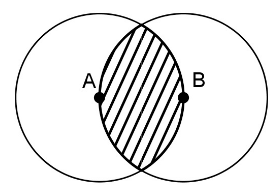


1. Długości boków prostokąta $ABCD$ wynoszą 10 cm i 5 cm. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Łuki MC i MD są ćwiartkami okręgów o środkach w punktach A i B. Łuk CD jest półokręgiem, zaś okrąg o środku O jest styczny do tego półokręgu w punkcie P, a do odcinka CD w punkcie N (patrz rysunek). Oblicz pole i obwód zakreskowanego obszaru.

2. Czy liczba $2017 \cdot \left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{2016^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{2017^2}\right)$ jest liczbą pierwszą?

3. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych:
   a) $\left[\left(\frac{x^2+y^2}{x-y}-\frac{x^2-y^2}{x+y}\right) : \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}+\frac{x+y}{x^2-y^2}\right)\right] \cdot \frac{y^2-xy+x^2}{2xy}$; $x=\sqrt{2}-1,\ y=\sqrt{2}+1$.
   b) $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab}-1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$; $a=\frac{3}{4},\ b=-0{,}25$.
   c) $\left[\left(a+\frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b}-a\right)\right] : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; $a=-\frac{4}{5},\ b=0{,}6$,
   d) $\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}+\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$; $x=0{,}6,\ y=-0{,}4$.

4. Rozstrzygnij, czy liczba $2^{30}+5^{2016}$ jest liczbą pierwszą.

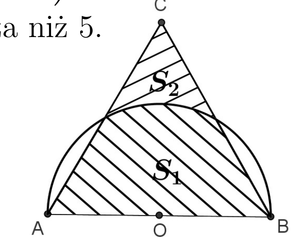


5. Dane są dwa okręgi o jednakowych promieniach równych 4 takie, że środek każdego z tych okręgów leży na drugim okręgu (patrz rysunek). Oblicz pole i obwód zakreskowanego obszaru.

6. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a,\ b$ zachodzi nierówność:
   a) $a^2+b^2 \geqslant 2(a+b-1)$; b) $a^2+b^2+9 \geqslant ab+3a+3b$.

7. Udowodnij, że liczba $3^{32}-1$ jest podzielna przez 640.

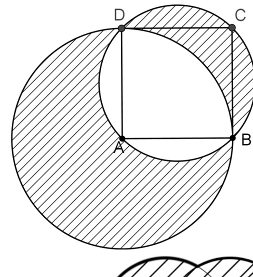
8. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left((a-b)^{-2}+(a+b)^{-2}\right) : \left(\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\right)^2$, następnie wyznacz jego wartość dla $a=1-\sqrt{3},\ b=2\sqrt{3}-2$ i rozstrzygnij, czy jest ona większa niż 5.



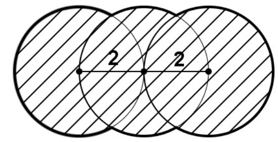
9. W trójkącie równobocznym o boku długości 10 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 5 (patrz rysunek). Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2.

10. Wiedząc, że liczba $a+\frac{1}{a}$ jest całkowita, uzasadnij, że liczby $a^2+\frac{1}{a^2}$, $a^3+\frac{1}{a^3}$ i $a^4+\frac{1}{a^4}$ są całkowite.

11. Na kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 opisano okrąg, a następnie wykreślono okrąg o środku w punkcie A i promieniu AB. Oblicz pole i obwód figury zacieniowanej na rysunku.

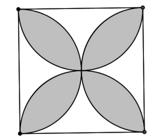


12. Z trzech okręgów o jednakowych promieniach równych 2 dwa są styczne zewnętrznie, a trzeci ma środek w punkcie styczności (rysunek obok). Oblicz pole i obwód otrzymanego w ten sposób obszaru.



13. Uzasadnij, że dla każdej liczby x wartość wyrażenia $4x^2 - 12x + 14$ jest nie mniejsza niż 5.

14. Oblicz pole i obwód zacieniowanej figury (rysunek obok), jeżeli długość boku kwadratu jest równa 10, a łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach tego kwadratu.

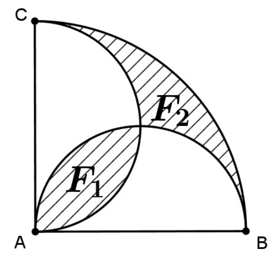


15. Pewna liczba x ma taką własność, że $x + \dfrac{1}{x} = 3$. Nie wyznaczając liczby x oblicz $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ oraz $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$.

16. Uzasadnij, że dla każdej liczby x liczba $4x^2 - 4x + 11$ jest dodatnia.

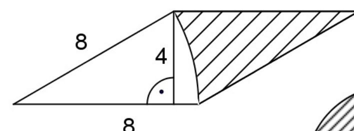
17. Czy liczba $2^{2014} + 5^{20}$ jest liczbą pierwszą?

18. Porównaj pola oraz obwody figur F_1 i F_2 (patrz rysunek obok) wiedząc, że $\triangle ABC$ jest prostokątny, $|AB| = |AC| = 4$, łuki CA i AB są półokręgami, zaś łuk BC jest ćwiartką okręgu o środku A.

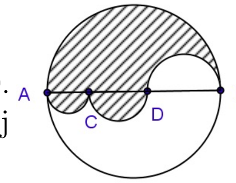


19. Czy liczba $2013 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2013^2}\right)$ jest kwadratem liczby naturalnej?

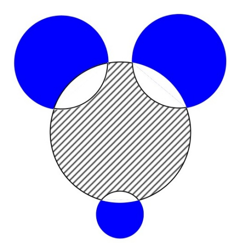
20. Oblicz pole zakreskowanego fragmentu rombu (rysunek obok).



21. Na średnicy AB koła obrano punkty C i D tak, że $|AC| = 6$, $|CD| = 8$, $|DB| = 10$. Na każdym z odcinków AC, CD i DB zbudowano półkole (patrz rysunek). Porównaj pola i obwody obszarów zacieniowanego i niezacieniowanego w kole.



22. Niech P będzie polem obszaru zacieniowanego, a S polem obszaru zakreskowanego (patrz rysunek obok). Średnice kół są równe: 6, 4, 4, 2. Uzasadnij, że $P = S$.



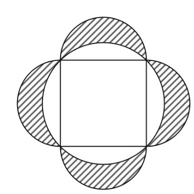
23. Czy liczba:

a) $2009 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2009^2}\right)$,

b) $3 \cdot \left(1 + \dfrac{2}{3}\right)\left(1 + \dfrac{2}{5}\right)\left(1 + \dfrac{2}{7}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{2}{2007}\right)$

jest liczbą pierwszą?

24. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu jest równa 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.



Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań: *„Liga Zadaniowa”* – zadania 52-81 na stronach 29-31 i zadania 211-239 na stronach 91-95 oraz *„Koło matematyczne w gimnazjum”* – strony 16-21 i 133-150.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki: *„Koło matematyczne w gimnazjum”* – zadania 93, 105, 113, 539, 593 oraz przykład 7 ze strony 48 i przykład 9 ze strony 138. Ponadto *„Liga Zadaniowa”* – zadanie 220 na stronie 92 i zadanie 228 na stronie 94.