

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY
II spotkanie konkursowe – 20 stycznia 2018 r.

1. Czy liczba

$$4036 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2017^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2018^2}\right)$$

jest liczbą pierwszą?

2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

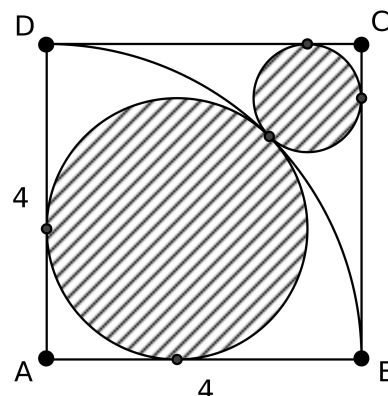
$$\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right) : \left(\frac{a^2}{b^2-a^2} + \frac{a}{a-b}\right) \cdot \frac{1}{a},$$

a następnie wyznacz jego wartość dla $a = -\sqrt{3} + 5$, $b = -3 + \sqrt{3}$.

3. Pewna liczba x ma taką własność, że $x - \frac{1}{x} = 5$. Nie wyznaczając liczby x , oblicz:

(a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$; (b) $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

4. Łuk BD , będący częścią okręgu o środku w punkcie A i promieniu długości 4, podzielił kwadrat $ABCD$ o boku długości 4 na dwie figury (patrz rysunek obok). W każdą z tych dwóch figur wpisano okrąg styczny do dwóch boków kwadratu i do łuku. Oblicz pole oraz obwód zakreślanej figury.



5. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność:

$$5x^2 + 4y^2 + 1 \geq 4x(1 + y).$$

6. Dany jest kwadrat o boku długości 10 cm. Oblicz pole i obwód figury będącej zbiorem wszystkich punktów, które są odległe od boków tego kwadratu o nie więcej niż 1 cm.

Uwaga 1. Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

Uwaga 2. Czas trwania konkursu – 90 minut.

Uwaga 3. Nie można używać kalkulatorów.

Zadania przygotowawcze na III spotkanie etapu rejonowego znajdują się na stronie Ligi Zadaniowej <http://liga.mat.umk.pl>