Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe
w dniu 7 kwietnia 2018 r.

Tematyka: 1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.
2. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. Punkty $B = (3, -4)$ i $C = (4, 3)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, a początek układu współrzędnych jest środkiem tego prostokąta. Znajdź pozostałe wierzchołki prostokąta i oblicz jego pole oraz obwód.

2. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary, zaś kolejne boki mają długości: 1, $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$.

3. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przyprostokątną na odcinki o długościach 3 i 5, przy czym odcinek o długości 3 leży przy kącie prostym. Oblicz:

   a) długości boków tego trójkąta,
   b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
   c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

4. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie: $\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : (a + b) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : (a - b)\right] \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$. Oblicz jego wartość dla $a = 5 + \sqrt{3}$ i $b = 2\sqrt{3} + 4$. Rozstrzygnij, czy wartość ta jest większa od $\frac{1}{20}$.

5. Długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi, przy czym najkrótszy z nich ma długość co najmniej 4 cm. Wysokość opuszczona na bok o średniej długości dzieli ten bok na dwa odcinki. Oblicz różnicę długości tych odcinków.

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność: $\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leqslant \frac{1}{ab}$.

7. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają długości równe 10 cm, a przedłużenia ramion trapezu przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

8. Oblicz: $\sqrt{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2018} + \sqrt{2016}}\right)$.

9. Punkty $A = (1, 5)$ i $B = (-2, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, zaś punkt S=(3,3) jest jego środkiem. Znajdź pozostałe wierzchołki tego równoległoboku i oblicz jego obwód.

10. Oblicz: $\sqrt{1 + 2018\sqrt{1 + 2017\sqrt{1 + 2016 \cdot 2014}}}$.

11. Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego są w stosunku 4:5, a jego przeciwprostokątna ma długość 41 cm. Oblicz:

    a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
    b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
    c) długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego w tym trójkącie.

12. Udowodnij, że dla dowolnych liczb a, b prawdziwa jest nierówność: $5a^2 + 4b^2 + 1 \geqslant 4a(1 + b)$.

13. Wyrażenie

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left[\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right]$$

doprowadź do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a=\sqrt{3}-1$ i $b=1+\sqrt{3}$.

14. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a,\ b,\ c$ prawdziwa jest nierówność: $4a^2+b^2+9c^2 \geqslant 2ab+6ac+3bc$.

15. Czy liczba $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ jest większa od 1,1?

16. O czworokącie wypukłym $ABCD$ wiadomo, że $|\sphericalangle DAB|=90^\circ$, $|\sphericalangle DBC|=90^\circ$ oraz $|DB|=12$ i $|DC|$=15. Wyznacz odległość pomiędzy środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D, A, B a środkiem okręgu przechodzącego przez punkty B, C, D.

17. W trapezie $ABCD$ długość podstawy AB jest równa 16, a długość podstawy CD jest równa 8. Oblicz pole i obwód tego trapezu wiedząc, że przekątne trapezu są dwusiecznymi kątów DAB i ABC.

18. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym suma odległości dowolnego punktu jego podstawy od ramion jest równa wysokości tego trójkąta opuszczonej na ramię.

19. Udowodnij, że jeśli $a,\ b,\ c$ są liczbami rzeczywistymi, to $a^2+b^2+c^2 \geqslant a(2b+2c-a)$.

20. Punkt $(-1,-1)$ jest środkiem rombu, którego pole jest równe 8. Jednym z wierzchołków rombu jest punkt $(-2,0)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego rombu.

21. Trójkąt ma boki długości 32, 24 i 40. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz odległość między środkami tych okręgów.

22. Środkowe BD i CF trójkąta ABC są prostopadłe oraz $|BD|=9$ cm i $|CF|=12$ cm. Wyznacz:

    a) pole trójkąta ABC,

    b) długości boków trójkąta ABC.

23. W pewnym trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten kąt w stosunku 1 : 2. Oblicz pole trójkąta, jeśli długość tej środkowej wynosi 10 cm.

24. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb $a,\ b$ zachodzi nierówność: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{4}{a+b}$.

25. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.

26. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle ACB|=90^\circ$, poprowadzono wysokość CD. Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś r_1 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC, r_2 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD. Udowodnij, że $r+r_1+r_2=|CD|$.

27. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań: *„Liga Zadaniowa”* – zad. 51 - 87 na str. 74 - 77 i zad. 276 - 310 na str. 101 - 105 oraz *„Koło matematyczne w gimnazjum”*.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki: *„Koło matematyczne w gimnazjum”* – zadania 102, 105, 485, 544, przykład 8 ze strony 19, przykład 10 ze strony 139 i przykład 7 ze strony 121. *„Liga Zadaniowa”* – Rozdział 4 Geometria, zadania: 64 na str. 75, 77 na str. 76 oraz 143 na str. 83.