

**Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki**  
**Województwo kujawsko-pomorskie**

**Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY**  
**III spotkanie konkursowe – 7 kwietnia 2018 r.**

1. Punkty  $B = (2, -4)$  i  $C = (3, 3)$  są wierzchołkami prostokąta  $ABCD$ , a punkt  $S = (-1, 0)$  jest środkiem tego prostokąta. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego prostokąta oraz oblicz jego pole i obwód.

2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$x \cdot \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)^2 \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \right),$$

a następnie wyznacz jego wartość dla  $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ .

3. O czworokącie wypukłym  $ABCD$  wiadomo, że  $|\sphericalangle DAB| = 90^\circ$ ,  $|\sphericalangle DBC| = 90^\circ$  oraz  $|DA| = 9$ ,  $|AB| = 12$  i  $|DC| = 39$ . Wyznacz odległość pomiędzy środkiem okręgu przechodzącego przez punkty  $D, A, B$  a środkiem okręgu przechodzącego przez punkty  $B, C, D$ .

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 + 9 \geq ab + 3a + 3b.$$

5. W trójkącie  $ABC$  wysokość  $CD$  dzieli bok  $AB$  na odcinki długości 25 cm i 35 cm. Środkowa  $CE$  ma długość 13 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

6. Uzasadnij, że liczba

$$\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{10}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2015}} + \frac{1}{\sqrt{2025} + \sqrt{2020}}$$

jest liczbą całkowitą oraz wyznacz liczbę jej dzielników naturalnych.

**Uwaga 1.** Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione.

**Uwaga 2.** Czas trwania konkursu – 90 minut.

**Uwaga 3.** Nie można używać kalkulatorów.