

**Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki**  
**Województwo kujawsko-pomorskie**  
**Klasa II gimnazjum**

**Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową**  
**w roku szkolnym 2017/2018**

1. Która z liczb  $a = \frac{7777777773}{7777777778}$  czy  $b = \frac{8888888882}{8888888887}$  jest większa?
2. Która z liczb  $127^{23}$  czy  $513^{18}$  jest większa?
3. Oblicz  $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}$ .
4. Uzasadnij, że  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2018^2} < \frac{2017}{2018}$ .
5. W jednym rzędzie wypisujemy kolejno wszystkie liczby naturalne od 1 do 100 i otrzymujemy napis 1234567891011...9899100. Wykreśl 100 cyfr tak, aby pozostałe były zapisem jak największej liczby.
6. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną dwucyfrową, której nie można przedstawić w postaci  $a \cdot b + c$ , gdzie  $a, b, c$  są pewnymi różnymi dodatnimi liczbami naturalnymi jednocyfrowymi.
7. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych podzielnych przez 9, które są zapisane tylko przy pomocy cyfr 0 i 5?
8. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych  $x, y$  takie, że
  - (a)  $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$ ;
  - (b)  $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$ .
9. Czy istnieją liczby naturalne  $x, y$  spełniające równanie  $x^2 + 5xy - y^2 = 6$ ?
10. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie  $201 \cdot x + 8 \cdot y = 2018$ .
11. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie  $x^2 + y^2 = 4z + 3$ .
12. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie  $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{17}{7}$ .
13. Ile istnieje liczb całkowitych  $n$  takich, że liczba  $\frac{16(n+1)}{n-1}$  jest także liczbą całkowitą?
14. Wyznacz wszystkie liczby czterocyfrowe takie, że jeśli usuniemy z jej zapisu cyfrę tysięcy, to otrzymana liczba będzie 5 razy mniejsza od liczby wyjściowej.
15. Dla danej liczby  $a$ , *ruchem* nazywamy tworzenie liczby  $a + 2$  lub  $2 \cdot a$ . Jaką najmniejszą liczbę ruchów trzeba wykonać, aby startując z liczby  $a = 1$  otrzymać liczbę 300?
16. Danych jest 9 liczb całkowitych. Udowodnij, że wśród nich można znaleźć takie dwie liczby, iż ich różnica jest podzielna przez 8.

17. W grupie 30 nastolatków średnia wieku jest równa 15 lat. Natomiast średnia wieku chłopców w tej grupie wynosi 17 lat, a dziewcząt 12 lat. Ilu jest chłopców i ile jest dziewcząt w tej grupie?
18. Czy można podzielić trójkąt równoboczny na 2018 trójkątów równobocznych?
19. Wyznacz kąty trójkąta o bokach  $a, b, c$ , jeśli pole tego trójkąta jest równe  $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ .
20. W równoległoboku  $ABCD$  punkt  $K$  jest środkiem boku  $BC$ , punkt  $M$  jest środkiem boku  $CD$  oraz  $|AK| = 6$ ,  $|AM| = 3$  i  $|\sphericalangle KAM| = 60^\circ$ . Wyznacz  $|BD|$ .
21. Niech  $T_2$  będzie trójkątem, którego każdy bok jest dłuższy od każdego boku trójkąta  $T_1$ . Czy wynika stąd, że pole trójkąta  $T_2$  jest większe od pola trójkąta  $T_1$ ?
22. W prostopadłościanie pomalowano wszystkie ściany. Następnie rozcięto ten prostopadłościan na 24 jednostkowe sześciiany. Okazało się, że 12 sześcianików ma pomalowane dwie ściany. Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu.
23. Tablicę o wymiarach  $m \times n$  podzielono na kwadraciki jednostkowe. W każdy kwadracik wpisano jedną liczbę tak, że suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest równa 1. Udowodnij, że  $m = n$ .
24. Punkty  $P, Q, R$  leżą na okręgu o promieniu 1, przy czym  $|PQ| = |QR| = 1$ . Wyznacz  $|PR|$ .
25. Na szachownicy o wymiarach  $8 \times 8$  znajduje się 14 figur. Udowodnij, że istnieje kwadrat o wymiarach  $2 \times 2$ , w którym nie ma żadnej figury.
26. Udowodnij, że wśród każdych siedmiu punktów leżących w sześciokącie foremnym o boku długości 1 cm istnieją dwa punkty, między którymi odległość jest mniejsza niż 1 cm.
27. Udowodnij, że wśród każdych sześciu punktów leżących w prostokącie o wymiarach  $3 \times 4$  można znaleźć dwa punkty takie, że odległość między nimi nie przekracza  $\sqrt{5}$ .

*Serdecznie zapraszamy  
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej  
w roku szkolnym 2017/2018!*