Liga Zadaniowa - konkurs przedmiotowy z matematyki

Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze na II spotkanie etapu rejonowego w dniu 20.01.2018 r.

Tematyka:

1. Obliczanie pól wielokątów.
2. Potęgi i pierwiastki.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
4. Kąty wierzchołkowe, naprzemianległe, przyległe i odpowiadające.
5. Kąty zewnętrzne i wewnętrzne różnych wielokątów.

1. Uzupełnij kwadrat magiczny:

$-2{,}1x^2+3{,}4x$		
$-0{,}3x^2+2{,}8x$	$4{,}5x^2-2x$	

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y$		$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$
	$-x-\frac{1}{4}y$	

2. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = a+b-4$ oraz $a\square b = 3a+4b$.

   a) Oblicz: $32 \triangle 8$, $(-6) \triangle 11$, $13\square 7$, $(-4)\square(-10)$, $(4\square 11) \triangle (20\square 13)$, $(-2)\square[(-3) \triangle (4\square 5)]$.

   b) Rozwiąż równania: $4 \triangle x = 11$, $x \triangle x = 20$, $x\square 23 = 125$, $23\square x = 125$, $x\square(2x) = 70$.

   c) Wykonaj operacje na wyrażeniach algebraicznych: $(2x-3y) \triangle (-x+5y)$, $(5x+8y)\square(-3x+2y)$, $(((x \triangle x) \triangle x) \triangle x) \triangle x$, $(((x\square x)\square x)\square x)\square x$, $[(x+3y)\square x] \triangle (6x-y)$.

3. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$. Punkt D należy do ramienia BC. Kąt BAD ma miarę trzykrotnie **większą** od miary kąta DAC. Wiadomo też, że odcinki AD i DC są tej samej długości. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkątów ABD i ADC.

4. W trójkącie ABC: punkt A_1 należy do boku CB i $|CA_1| = \frac{1}{7}|CB|$; punkt C_1 należy do boku AB i $|AC_1| = \frac{1}{5}|AB|$; punkt A_2 należy do odcinka A_1B i $|A_1A_2| = \frac{1}{3}|A_1B|$. Wiadomo, że pole trójkąta C_1BA_2 jest równe 16 cm^2. Oblicz pole trójkąta ABC.

5. Punkt E należy do boku AB równoległoboku $ABCD$ i nie jest wierzchołkiem tego równoległoboku. Prosta DE przecina przekątną AC w punkcie X. Uzasadnij, że pola trójkątów AXD i EXC są równe.

6. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC pozostają w stosunku $10:6:4$. Dwusieczne mniejszych kątów wewnętrznych B i C przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie B_1, dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie C_1. Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta AC_1PB_1.

7. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o kącie przy dłuższej podstawie α. Dwusieczne sąsiednich kątów **zewnętrznych** przecinają się w punktach K, L, M, N. Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta o wierzchołkach w punktach K, L, M, N. Jakim czworokątem jest czworokąt o wierzchołkach K,L,M,N?

8. Czworokąt $ABCD$ ma kąty wewnętrzne o miarach: $|\sphericalangle A| = 90^o$, $|\sphericalangle B| = 50^o$, $|\sphericalangle C| = 90^o$. Dwusieczne sąsiednich kątów **zewnętrznych** przecinają się w punktach K, L, M i N. Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta $KLMN$. Jakim czworokątem jest $KLMN$?

9. Równoległobok $ABCD$ ma pole równe S. Punkt E należy do boku AB i $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{3}$. Punkt F należy do boku BC i $\frac{|CF|}{|FB|} = \frac{1}{4}$. Oblicz pole trójkąta DEF.

10. Miary zewnętrznych kątów trójkąta pozostają w proporcji 4:3:2. Znajdź miarę kąta między dwusiecznymi wychodzącymi z wierzchołków mniejszych kątów wewnętrznych tego trójkąta.

11. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej AC wybrano punkt X różny od punktu przecięcia przekątnych. Przez punkt X poprowadzono prostą m równoległą do boku AB, przecinającą bok AD w punkcie M i bok BC w punkcie N, oraz prostą n równoległą do boku AD, przecinającą bok AB w punkcie P i bok DC w punkcie Q. Uzasadnij, że czworokąty $MXQD$ i $PBNX$ mają równe pola.

12. Obwód prostokąta jest równy 220. Dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych dzieli dłuższy bok prostokąta w stosunku 3:4. Oblicz długości boków prostokąta oraz iloraz pól figur, na które rozcięła prostokąt wspomniana dwusieczna. Rozpatrz wszystkie przypadki.

13. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD mamy $|BC| = |CD| = |DA|$ i przekątna AC jest prostopadła do boku BC. Oblicz miary kątów tego trapezu.

14. Oblicz: $\dfrac{4 \cdot 2^{20} + \frac{1}{4} \cdot 8^8 + 2 \cdot 4^{11}}{2^{22} + 4 \cdot 16^5}$, $\dfrac{8^3 \cdot 6^5}{8 \cdot 6^8 - 6 \cdot 12^5}$, $\dfrac{(3^2+5^2+6^2)^7}{(7^6+7^8)(3 \cdot 5^5 + 5^7)}$,

$\dfrac{2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}}$, $\dfrac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$, $\dfrac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$.

15. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę większą: a) $(1{,}5)^{64}$ i 6^{16}, b) 81^{64} i 4^{192}, c) 25^{27} i 4^{42}.

16. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej: 2^{90}, 3^{60}, 5^{45}, 8^{45}, 16^{30}.

17. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę mniejszą: a) $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$ i 10^{55},
b) $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2017)^2$ i 2017^{1009}, c) $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2012 \cdot 2014)^2$ i 2014^{1007}.

18. Uzasadnij, że liczba n jest podzielna przez liczbę k :
a) $n = 7^{2018} - 7^{2016}$ i $k = 3$, b) $n = 3^{80} + 3^{82} + 3^{84} + 3^{86}$ i $k = 41$,
c) $n = 4^{2001} + 4^{2002} + \ldots + 4^{2017} + 4^{2018}$ i $k = 7$, d) $n = 5^1 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2017} + 5^{2018}$ i $k = 6$.

19. Przez jaką najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią należy przemnożyć liczbę 2016, aby otrzymać kwadrat liczby naturalnej (sześcian, czwartą potęgę, ...)?

20. Podaj przynajmniej 2 pary liczb całkowitych dodatnich m i n takich, że $2 \cdot n^3 = m^4$.

21. Podaj cyfrę jedności liczb: 2^{100}, 3^{531}, 27^{345}, $234^{567} \cdot 567^{890}$, $2^{2018} + 3^{2018} + 4^{2018}$, $9^{888} + 7^{666} \cdot 4^{333}$.

22. Wypisz wszystkie dzielniki dodatnie podanych liczb: 3^5, 2^8, 7^{15}, 6^2, 15^3, $2^5{\cdot}3$, $3^4{\cdot}5^2$, $2^4{\cdot}7^3$, $7^3{\cdot}11{\cdot}13^2$.

23. Ile różnych dzielników dodatnich ma każda z podanych liczb: $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7$, $12^3 \cdot 14^4$, $33^4 \cdot 34^3 \cdot 35^2 \cdot 36$, $6^{12} \cdot 4^{10} + 6^{11} \cdot 4^{11} + 6^{10} \cdot 4^{12}$?

24. Oblicz: a) $\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{729} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{625} + 4 \cdot \sqrt[4]{81}}$, b) $\sqrt[3]{10 \cdot \sqrt[4]{256} + 8 \cdot \sqrt[4]{81}} \cdot \sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27} + 15 \cdot \sqrt[3]{64}}$,
c) $\dfrac{\sqrt[5]{3125} \cdot \sqrt[4]{6561} \cdot \sqrt{729}}{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{15625} \cdot \sqrt{324}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1000}{729}}$, d) $\dfrac{(\sqrt{6})^5 \cdot (\sqrt[3]{18})^6}{(\sqrt{8})^3 \cdot (\sqrt[3]{9})^{12}} \cdot \sqrt{3}$, e) $\dfrac{[3 \cdot (\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} + 1)]^2}{(\sqrt{5})^4 \cdot [(\sqrt{2})^6 + 1]}$,
f) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$, g) $\left(3\sqrt[3]{56} + 2\sqrt[3]{189} - 2\sqrt[3]{25 \cdot 35}\right)^3$.

25. Porównaj liczby a) $\sqrt[3]{\dfrac{2017}{2018}}$ i $\sqrt[3]{\dfrac{2016}{2017}}$; b) $\sqrt{2 \cdot 4^5 + 2^{11}}$ i 2^6; c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{3}$; d) $\sqrt[4]{3}$ i $\sqrt[5]{4}$,

Uwaga: W przygotowaniach do II spotkania można wykorzystać zbiory zadań:
Liga Zadaniowa, str. 32-33 (zad. 82-103); str. 69-73 (zad. 1-29, 34, 36, 39, 45, 46, 48) i str. 79-87 (zad. 101, 125, 126, 163, 168, 169, 172-178, 182, 183);
Koło matematyczne w szkole podstawowej, str. 145-166;
Koło matematyczne w gimnazjum, rozdziały: Liczby (zad. 3, 4, 28, 34-38); Wyrażenia algebraiczne (zad. 68-76); Kąty; Pola i obwody.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki: *Liga Zadaniowa* zad. 84, str. 77, zad. 107, str. 80, zad. 199, str. 89;
Koło matematyczne w gimnazjum: zad. 68, 118, 169 oraz Przykład 3, str.17, Przykład 1, str. 45, Przykład 6, str. 106.