Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki

Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze na III spotkanie etapu rejonowego w dniu 7.04.2018 r.

Tematyka:
1. Zadania logiczne.
2. Przekształcanie wzorów.
3. Równania w zadaniach tekstowych.
4. Układ współrzędnych.

1. Punkty $A = (-2, 4)$ i $B = (4, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, którego pole jest równe 24. Znajdź współrzędne punktu C wiedząc, że: a) odcięta punktu C jest równa -3, b) trójkąt ABC jest równoramienny, c) trójkąt ABC jest prostokątny, d) trójkąt ABC jest ostrokątny.

2. Pięciokąt $ABCDE$ ma wierzchołki o współrzędnych: $A = (0, -5)$, $B = (11, 8)$, $C = (0, 7)$, $D = (-8, -4)$, $E = (-6, -8)$. Porównaj pola trójkąta ABC i czworokąta $CDEA$.

3. Dane są punkty o współrzędnych $(-4, -2)$, $(3, -2)$, $(-1, 4)$. Wyznacz wszystkie równoległoboki, których wierzchołki znajdują się w podanych punktach i podaj współrzędne tych wierzchołków. Który z tych równoległoboków ma największe pole?

4. Punkty $A = (-2, -2)$ i $B = (6, -2)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$, w którym podstawa CD jest dwa razy krótsza od podstawy AB, kąty przy wierzchołkach A i B są ostre, a pole trapezu jest równe 24. Wiadomo też, że współrzędne wierzchołków C i D są liczbami całkowitymi. Ile istnieje różnych par punktów C i D, które wraz z punktami A i B tworzą wierzchołki trapezu $ABCD$ o podanych własnościach. Podaj współrzędne punktów C i D w każdym z przypadków.

5. Punkty $A = (-4, -2)$, $B = (-1, -7)$, $C = (5, -2)$ są trzema z czterech wierzchołków czworokąta $ABCD$. Pole trójkąta ACD jest dwukrotnie większe od pola trójkąta ABC. Współrzędne wierzchołka D są liczbami całkowitymi. W ilu różnych punktach płaszczyzny może znajdować się punkt D, jeśli wiadomo, że czworokąt $ABCD$ jest wypukły, tzn. wszystkie kąty wewnętrzne tego czworokąta mają miary mniejsze niż $180°$?

6. W prostokątnym układzie współrzędnych dane są trzy punkty $X = (-2, 4)$, $Y = (1, 9)$ i $O = (6, -1)$. Wiadomo, że punkty X i Y są wierzchołkami równoległoboku, a punkt O punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Podaj współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków tego równoległoboku. Oblicz pole tego równoległoboku.

7. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-25, -30)$, $B(50, 0)$, $C(65, 40)$ i $D(0, 15)$. Przekątna AC dzieli czworokąt na dwa trójkąty: ABC i ADC. Oblicz iloraz długości wysokości h_B i h_D poprowadzonych w tych trójkątach z wierzchołków B i D do podstawy AC.

8. Ze wzoru wyznacz zmienną a: a) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, b) $P = 2ab + 2ac + 2bc$, c) $S = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$, d) $t = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, e) $x = \frac{a+3}{a+1}$, f) $c = \frac{a \cdot b}{a+b}$, g) $c = \frac{3a+b}{\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b}$.

9. Wiedząc, że $\frac{a-4b}{b} = 7$, oblicz: a) $\frac{2a+3b}{a}$, b) $\frac{a^2 - 4ab - 16b^2}{a^2 + b^2}$, c) $\frac{(a+2b)^2 - (2a-3b)^2}{(5b-a)^2}$.

10. Wiedząc, że $z = \frac{2x+y}{4 \cdot x \cdot y}$ wyznacz zmienną y, a następnie oblicz wartośc ilorazu $\frac{y}{x}$ dla $x = 1,5$ i $z = 0,2$.

11. Wiedząc, że $a^2 = a + 1$, uzasadnij, że $a^3 = 2a + 1$, $a^4 = 3a + 2$, $a^5 = 5a + 3$.

12. Zosia przechowuje swoje oszczędności tylko w monetach dwuzłotowych i pięciozłotowych. Wartość wszystkich dwuzłotówek stanowi czwartą część całych jej oszczędności, a pięciozłotówek ma 36. Ile pieniędzy ma Zosia?

13. Janek jest o 3 lata młodszy od swego brata Maćka. Maciek ma obecnie cztery razy tyle lat, ile miał Janek wtedy, kiedy Maciek miał tyle lat, ile teraz ma Janek. Ile lat ma każdy z chłopców?

14. Każdy z trzech chłopców, Antek, Michał i Szymon posiadał pewną liczbę szklanych kulek. W pewnej chwili wykonali oni następującą operację. Najpierw Antek ze swojego zapasu kulek dał Michałowi i Szymonowi po tyle kulek, ile każdy z nich posiadał. Następnie Michał potroił stan posiadania każdego z kolegów, Antka i Szymona, oddając im część swoich kulek. Na koniec Szymon przekazał Antkowi i Michałowi tyle kulek, że każdy z tych chłopców miał ich cztery razy więcej niż przed podarunkiem Szymona. W rezultacie okazało się, że każdy miał po 24 kulki. Ile kulek miał każdy z chłopców na początku?

15. Dla jakich wartości d z odcinków długości $4d-2$, $2d+6$ i $6d-5$ można utworzyć trójkąt równoramienny?

16. Pociąg, jadąc ze stałą prędkością, przejeżdża przez most długości 450 m w ciągu 45 sekund. Jadąc z tą samą prędkością w ciągu 15 sekund pociąg ten mija słup telegraficzny. Jaka jest długość pociągu i jaka jest jego prędkość w km/godz?

17. Braciszek odbiegł od swej starszej siostry o 30 swoich kroków. Siostra próbuje dogonić brata, ale chłopiec nadal ucieka. Siostra, wykonując cztery swoje kroki, pokonuje taką samą odległość jak jej braciszek stawiając dziewięć swoich kroków. W ciągu tego samego czasu siostra wykonuje siedem kroków, a braciszek aż dwanaście. Ile kroków wykona jeszcze braciszek zanim siostra go dogoni?

18. Mały dźwig przeładowuje określoną ilość towaru w ciągu 10 godzin, średni dźwig wykonuje tę samą pracę w ciągu 8 godzin, a duży dźwig - w ciągu 4 godzin. Czy opłaca się w celu skrócenia czasu pracy zastąpić jednoczesną pracę małego i średniego dźwigu przez pracę dużego dźwigu?

19. Andrzej jest **lżejszy** o 20% od Bartka, Bartek jest **cięższy** o 10% od Radka. Najlżejszy z chłopców waży 44 kg. Ustaw chłopców w kolejności od najlżejszego do najcięższego i podaj, ile waży każdy z nich.

20. Świeże jabłka zawierają 92% wody, a suszone tylko 12% wody. Ususzono 22 kg jabłek. O ile kilogramów mniej ważą jabłka po ich wysuszeniu?

21. Znajdź wszystkie liczby całkowite podzielne przez 3, które mają dwie następujące własności:
(1) pomniejszenie szukanej liczby o 3 oznacza pomniejszenie jej o więcej niż 2,5%;
(2) powiększenie szukanej liczby o 9 oznacza powiększenie jej o mniej niż 8%.

22. Średni wiek trzech osób siedzących przy stole był równy 24 lata. Do tych trzech osób dosiadły się jeszcze dwie osoby i wówczas średni wiek wszystkich pięciu osób był równy 26 lat. Jaki był średni wiek dwóch osób, które dołączyły do towarzystwa później?

23. Brat i siostra otrzymali od rodziców pewną ilość pieniędzy. Jeśli siostra odda bratu 20% swojej części, to brat będzie miał o 50% więcej pieniędzy niż siostra. Które dziecko otrzymało od rodziców więcej pieniędzy?

24. Okrągły stół nakryto dla pięciu osób, przy czym nakrycie dla każdej z osób, która zasiądzie przy stole, jest innego koloru: jedno żółte, drugie niebieskie, trzecie zielone, czwarte fioletowe i piąte pomarańczowe. Do stołu zasiądą panowie X i Y oraz panie A, B i C. Pan X nigdy nie siada obok pani A. Na ile sposobów można rozmieścić przy stole te pięć osób tak, aby pan X i pani A nie siedzieli obok siebie?

25. Trzecia część wszystkich zadań pewnego zbioru zadań to zadania trudne, ósma część wszystkich zadań to zadania nudne. Co piąte zadanie nudne jest trudne. Ile procent zadań nietrudnych to zadania nudne? Ile co najmniej zadań zawarto w zbiorze?

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań:
Liga Zadaniowa, str.46-68, str. 82-83 (zad. 128,130,131,141,142), str. 157 (zad. 21);
Koło matematyczne w szkole podstawowej, rozdziały: Logika, Równania, Zadania o wieku;
Koło matematyczne w gimnazjum, rozdziały: Równania i nierówności, Procenty, Zadania logiczne.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki: *Koło matematyczne w gimnazjum*, zadania 235, 253, 330, 348, 701; Przykład 5, str.47; Przykład 6, str. 48; Przykład 2, str. 70.