Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie
Klasa VII szkoły podstawowej

Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową
w roku szkolnym 2017/2018

1. Rozmieść na okręgu cztery jedynki, trzy dwójki i trzy trójki tak, aby suma dowolnych trzech kolejnych liczb umieszczonych na okręgu nie dzieliła się przez 3.

2. Oblicz sumę cyfr liczby $(99\dots9)^2$, jeśli w zapisie podstawy potęgi mamy 99 dziewiątek.

3. Wskaż najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, podzielną przez 36, o tej własności, że każda cyfra tej liczby jest albo trójką albo czwórką, przy czym każda z tych cyfr pojawia się co najmniej raz.

4. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią o tej własności, że podzielona przez każdy z ułamków, $\frac{12}{7}$ i $\frac{42}{25}$, da w wyniku liczbę całkowitą.

5. Kolekcjoner drogich kamieni zauważył, że liczba ametystów do liczby szmaragdów ma się tak, jak $6:5$, liczba rubinów do liczby diamentów ma się tak, jak $4:3$, liczba szmaragdów do liczby rubinów ma się tak, jak $2:1$. Ile co najmniej kamieni liczy kolekcja?

6. Czy istnieją liczby naturalne a i b takie, że $a \cdot b \cdot (a-b) = 7007$?

7. Znajdź wszystkie pary cyfr a i b o tej własności, że liczba $\overline{ababa}$ jest podzielna przez 3 i liczba $\overline{bababa}$ jest podzielna przez 18.

8. Cyfry a, b i c spełniają warunek: $0 < a < b < c$. Suma wszystkich trzycyfrowych liczb, których zapisy można utworzyć przez różne ustawienia tych cyfr jest równa 1554. Wyznacz te cyfry.

9. Wiadomo, że suma pewnych dwóch dodatnich liczb całkowitych jest równa 221, a ich najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa 612. Znajdź te liczby.

10. Pewne liczby całkowite dodatnie x i y spełniają równanie $13 \cdot x = 31 \cdot y$. Uzasadnij, że ich suma jest liczbą złożoną.

11. W pewnej grupie osób ponad 80% osób uprawia intensywnie sport, nie mniej niż 70% to wielbiciele muzyki. Czy można z całą pewnością stwierdzić, że większość tej grupy stanowią wysportowani melomani?

12. Jaś mówi do Stasia: *Gdybyś podarował mi 100 zł, to miałbym dwa razy więcej pieniędzy niż ty.* Staś odpowiada: *Gdybym dostał od ciebie tylko 10 zł, to miałbym 6 razy więcej pieniędzy niż ty.* Ile pieniędzy ma każdy z chłopców?

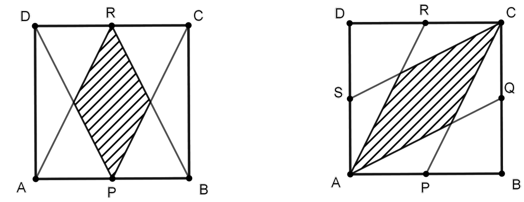
13. Cena wyrażona w złotówkach i groszach wzrosła o 4%. Nowa cena jest równa n i wyraża się w pełnych złotówkach. Jaką najmniejszą możliwą wartość ma n? Jaka cena początkowa odpowiada tej wartości?

14. Rozwiąż równanie
$$x - (x - (x - (\ldots - (x - (x-1))\ldots))) = 1,$$
jeśli w zapisie występuje 15 par nawiasów.

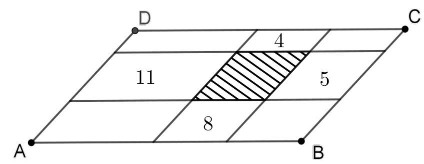
15. Jeśli do pewnej pięciocyfrowej liczby dopisać siódemkę z lewej strony, to otrzymana liczba sześciocyfrowa jest 5 razy większa od liczby sześciocyfrowej utworzonej z tej pięciocyfrowej liczby przez dopisanie siódemki z jej prawej strony. Wskaż tę pięciocyfrową liczbę.

16. Udowodnij, że jeżeli $x = \dfrac{a-b}{a+b}$, $y = \dfrac{b-c}{b+c}$, $z = \dfrac{c-a}{c+a}$, to $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$.

17. Przy pomocy czterech odcinków podzielono kwadrat $ABCD$ na wielokąty na dwa różne sposoby, przy czym punkty P, Q, R i S są środkami boków kwadratu (patrz rysunki obok). Oblicz różnicę pól zacieniowanych czworokątów.

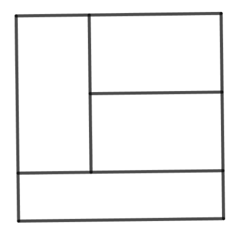


18. Równoległobok $ABCD$ podzielono na 9 mniejszych równoległoboków przy pomocy czterech odcinków: dwóch równoległych do boku AD i dwóch równoległych do boku AB. Na rysunku podano obwody czterech małych równoległoboków. Wiadomo, że obwód równoległoboku $ABCD$ jest równy 21. Ile jest równy obwód małego środkowego równoległoboku?



19. W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB, punkt E leży na boku BC. Wiadomo, że $\sphericalangle CAB = 90°$, $\sphericalangle ABC = 35°$, $\sphericalangle DCE = 10°$, $\sphericalangle EAD = 20°$. Oblicz miary kątów ADC i AEC.

20. Kwadrat o boku 1 rozcięto na cztery prostokąty o równych polach, przy czym układ prostokątów przedstawiono na rysunku. Podaj wymiary prostokątów.



21. W trójkącie ABC punkt M należy do boku AC, punkt N należy do boku AB. Wiadomo, że $\sphericalangle BNC = 4\alpha$, $\sphericalangle BCN = 6\alpha$, $\sphericalangle BMC = \sphericalangle MBC = 5\alpha$. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.

22. Punkty P, Q i R są środkami boków BC, CD i DA prostokąta $ABCD$, punkt M jest środkiem odcinka QR. Jaką część pola prostokąta $ABCD$ stanowi pole trójkąta AMP?

23. Wiadomo, że w dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie. Uzasadnij, że środkowe rozcinają trójkąt na sześć trójkątów o równych polach. Wywnioskuj stąd, że punkt przecięcia środkowych dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1 licząc od wierzchołka.

24. W kwadracie $ABCD$ poprowadzono przekątną AC oraz odcinek BE łączący wierzchołek B ze środkiem boku CD. Odcinki AC i BE przecinają się w punkcie X.

    (a) W jakim stosunku punkt X dzieli odcinek BE?

    (b) W jakim stosunku punkt X dzieli odcinek AC?

    (c) W jakim stosunku pozostają pola trójkąta BCX i czworokąta $AXED$?

25. Niech punkty E i F będą środkami boków AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Niech punkt M będzie punktem przecięcia odcinków BF i CE, a punkt N punktem przecięcia odcinków AF i DE. Uzasadnij, że pole czworokąta $MFNE$ jest równe sumie pól trójkątów BMC i AND.

Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2017/2018!