Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie

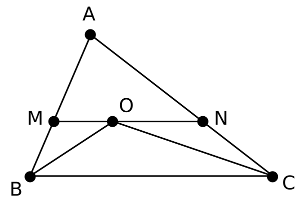
Klasa VII SP i II Gimnazjum

Prezent wakacyjny 2018 r.

1. Oblicz $\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$.
2. Oblicz $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
3. Oblicz $\dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.
4. Oblicz $\sqrt[3]{\dfrac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\ldots+n\cdot 3n\cdot 9n}}$.
5. Niech a i b będą różnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że $am+bn<0$ i $bm+an>0$.
6. Liczby x,y są dodatnie i takie, że $x+y=1$. Udowodnić, że $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geqslant 9$.
7. Wiadomo, że a,b,c,d,e i f są różnymi cyframi oraz spełnione są równości: $a+b=d$, $b+c=e$ i $d+e=f$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości a,b,c,d,e i f.
8. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x,y,z) takie, że dla każdej z nich suma jej i iloczynu pozostałych dwóch jest równa 2.
9. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite o własności, że pierwszą ich cyfrą (patrząc od lewej strony) jest 6, a liczba powstała po skreśleniu cyfry 6 jest 25 razy mniejsza.
10. Liczba naturalna a jest podzielna przez 42. Suma cyfr, które nie zostały użyte w zapisie liczby a, jest równa 25. Udowodnić, że w zapisie liczby a mamy co najmniej dwie jednakowe cyfry.
11. Uzasadnić, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita d taka, że po skreśleniu w jej zapisie pierwszej cyfry otrzymujemy liczbę 35 razy mniejszą.
12. Liczby naturalne a i b są mniejsze niż 2018. Wiadomo, że liczba a jest podzielna przez 54, liczba b dzieli się przez 31 oraz liczba $a+b$ dzieli się przez 85. Udowodnić, że liczba $a-b$ jest podzielna przez 23.
13. Dowieść, że równanie $x^3+11^3=y^3$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.
14. Uzasadnić, że w dowolnym systemie pozycyjnym
    (a) liczba 10201 jest złożona, gdy podstawa jest większa niż 2;
    (b) liczba 10101 jest złożona przy dowolnej podstawie.
15. Ile par dodatnich liczb całkowitych (x,y) spełnia równanie $x^2+y^2=x^3$?
16. Udowodnić, że jeśli p i $p+2$ są liczbami pierwszymi większymi niż 3, to liczba $p+1$ jest podzielna przez 6.
17. Liczby całkowite $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ zapisujemy w rzędzie tak, aby począwszy od drugiej liczby każda była albo mniejsza od wcześniej wpisanych albo większa od wcześniej wpisanych. Na ile sposobów możemy to uczynić?
18. Kuba napisał na tablicy 20 liczb naturalnych. Następnie pomnożył każdą z nich przez każdą inną i otrzymał 190 iloczynów. Uzasadnić, że wśród tych iloczynów jest co najmniej 20 liczb, które mają taką samą cyfrę jedności.

19. Czy można liczby naturalne $1, 2, 3, \ldots, 199, 200$ ustawić w ciąg (szereg) tak, by każde dwie liczby sąsiadujące różniły się o 2 lub jedna z nich była 2 razy większa od drugiej?

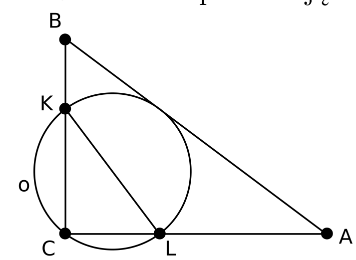
20. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|AC| = 8$ i $|AM| = 3$, gdzie M jest środkiem boku BC. Wyznacz $|BC|$.

21. 

W trójkącie ABC dwusieczna kąta ABC zawiera odcinek BO oraz dwusieczna kąta BCA zawiera odcinek CO. Ponadto $|AB| = 12$, $|BC| = 24$ i $|AC| = 18$. Wyznaczyć obwód trójkąta AMN, jeśli odcinek MN jest równoległy do BC i przechodzi przez punkt O.

22. W trójkącie prostokątnym ABC: $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, $|BC| = 4$, ponadto środkowe CM i BN przecinają się pod kątem prostym. Wyznacz $|BN|$.

23. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10$, $|AC| = 8$ i $|BC| = 6$. Okrąg o to okrąg o najmniejszym promieniu styczny do AB i przechodzący przez wieczchołek C. Punkty K, L są punktami przecięcia okręgu o odpowiednio z bokami BC i AC. Wyznaczyć $|KL|$.



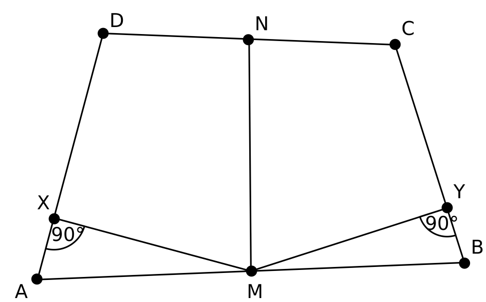
24. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$ i $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$. Wyznaczyć długość dwusiecznej kąta ABC.

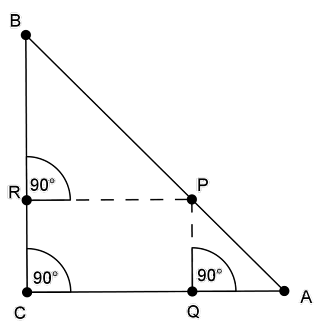
25. Niech o będzie okręgiem o środku O i niech P będzie punktem różnym od punktu O. Przez punkt P prowadzimy proste, z których każda przecina okrąg o w dwóch punktach. Punkty te są końcami cięciw w okręgu o. Uzasadnić, że środki wszystkich takich cięciw leżą na pewnym okręgu wspólnym dla wszystkich prostych, a więc zależnym tylko od punktu P.

26. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 12$, $|DA| = 13$ i $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$. Oblicz pole tego czworokąta.

27. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB. Na odcinku CM wybrano punkty P i Q tak, że $|CQ| = 2 \cdot |PM|$ i $|\sphericalangle APM| = 90^\circ$. Udowodnić, że $|BQ| = |AC|$.

28. Punkty M i N są środkami boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Na bokach AD i BC obrano punkty X i Y tak, że $|XD| = 3 \cdot |XA|$ i $|YC| = 3 \cdot |YB|$. Okazało się, że $|\sphericalangle MXA| = |\sphericalangle MYB| = 90^\circ$. Udowodnić, że $|\sphericalangle XMN| = |\sphericalangle ABC|$.



29. 

Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym równoramiennym i niech $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$ oraz $|AC| = |BC| = 1$. Niech dla punktu P leżącego na przeciwprostokątnej AB punkty R i Q będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na przyprostokątne BC i AC. Udowodnić, że największe z pól: $P_{\triangle BRP}$, $P_{\triangle APQ}$, P_{CQPR} jest nie mniejsze niż $\frac{2}{9}$.

30. W trójkącie równobocznym ABC dany jest punkt P. Niech d_a, d_b, d_c będą odległościami puntu P odpowiednio od boków BC, AC, AB. Udowodnić, że $\dfrac{d_a + d_b + d_c}{|AB| + |BC| + |CA|} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

31. W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 punkt P leży na boku AB, punkt Q na boku BC, punkt R na boku CD i punkt S na boku DA. Udowodnić, że $2 \leqslant |PQ|^2 + |QR|^2 + |RS|^2 + |SP|^2 \leqslant 4$.

Życzymy udanych wakacji!