

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie
Klasa VI szkoły podstawowej
Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową
w roku szkolnym 2018/2019

1. Odtworzyć działanie:

$$\begin{array}{r}
 \square \square 8 \square \square \\
 \square \square \square \square \square \square \square : \square \square \\
 - \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 - \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \\
 - \square \square \square \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

2. Cyfrą jedności liczby sześciocyfrowej jest 2. Jeśli tę cyfrę przeniesiemy na początek zapisu dziesiętnego, to otrzymamy liczbę trzy razy mniejszą od liczby początkowej. Wyznaczyć wszystkie liczby sześciocyfrowe o takiej własności.
3. Wyznaczyć wszystkie liczby postaci $523 * **$, które są podzielne przez każdą z liczb: 7, 8, 9.
4. Suma cyfr liczby dwucyfrowej oraz suma cyfr każdego z iloczynów tej liczby przez 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jest taka sama. Wyznaczyć wszystkie liczby dwucyfrowe o tej własności.
5. Uzasadnić, że wśród dowolnych 11 liczb naturalnych istnieją takie dwie liczby, których różnica jest wielokrotnością liczby 10.
6. Uzasadnić, że wśród każdych kolejnych dziesięciu liczb dodatnich całkowitych istnieje liczba, która nie ma wspólnego dzielnika różnego od 1 z żadną z pozostałych liczb.
7. Wyznaczyć dwie liczby naturalne m i n , z których żadna nie jest wielokrotnością drugiej i takie że $\text{NWW}(m, n) = 630$ i $\text{NWD}(m, n) = 18$.
8. Ile liczb pierwszych znajduje się w każdym z poniższych ciągów?
- (a) 23, 253, 2553, 25553, 255553, ...
- (b) 41, 451, 4551, 45551, 455551, ...
- (c) 17, 187, 1887, 18887, 188887, ...
9. Wiadomo, że liczby p oraz $10p + 1$ są pierwsze oraz $p > 3$. Udowodnij, że $5p + 1$ nie jest liczbą pierwszą.
10. Przez jaką liczbę całkowitą wystarczy pomnożyć liczbę 9 (99, 999 itd.), aby otrzymać liczbę, której zapis dziesiętny zawiera same jedynki.
11. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne x, y takie że $x^2 + y^2 = 74$.
12. Udowodnić, że $\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{4036} > \frac{1}{2}$.
13. Czy istnieje liczba naturalna, dla której zapis dziesiętny jej kwadratu zaczyna się układem cyfr 123456789 i kończy się układem cyfr 987654321?

14. Znaleźć dwie liczby dwucyfrowe wiedząc, że suma wszystkich pozostałych liczb dwucyfrowych jest 50 razy większa od jednej z tych szukanych liczb.
15. Uzasadnić, że w dowolnej liczbie pięćdziesięciocyfrowej, której zapis nie zawiera cyfry 0, można wykreślić pewną liczbę cyfr tak, aby pozostałe zapisane w tej samej kolejności tworzyły liczbę podzielną przez 101.
16. Przy stole siedziało pięć dziewczynek i kilku chłopców. Na stole na talerzu leżało 30 bułek. Każda dziewczynka podała każdemu znajomemu chłopcu jedną bułkę z talerza. Następnie każdy chłopiec podał jedną bułkę z talerza każdej nieznanym dziewczynce. Wtedy okazało się, że na talerzu już nie ma bułek. Ilu chłopców siedziało przy stole?
17. W parku rośnie 18 dębów. Na każdym z nich było tyle samo żołądzi. W pewnym momencie powiew wiatru strącił z pewnych dębów połowę żołądzi, z innych dębów $\frac{1}{3}$ żołądzi, a z pozostałych dębów nie spadł ani jeden żołądź. Wiadomo też, że ze wszystkich dębów spadła w sumie $\frac{1}{9}$ wszystkich żołądzi. Z ilu dębów wiatr nie strącił ani jednego żołądza?
18. Na stole leży 20 patyczków. Gracze kolejno, na przemian, biorą ze stołu jeden albo dwa patyczki. Wygrywa ten z graczy, który zabierze ostatnie patyczki ze stołu. Ile patyczków powinien wziąć w pierwszym ruchu pierwszy gracz i jak powinien grać, aby zapewnić sobie wygraną?
19. Na stole mamy 2019 monet. Andrzej i Bartek grają w następującą grę: kolejno i na przemian podchodzą do stołu i biorą pewną liczbę monet, przy czym Andrzej może wziąć nieparzystą liczbę monet z tym, że liczba ta może być jedną spośród $1, 3, 5, \dots, 99$; Bartek może wziąć parzystą liczbę monet, przy czym liczba ta może być jedną z liczb $2, 4, 6, \dots, 100$. Przegrywa ten z chłopców, który nie może wykonać już ruchu. Grę zaczyna Andrzej. Który z chłopców ma strategię wygrywającą?
20. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowany jest na czerwono lub zielono. Udowodnić, że istnieją dwa punkty tego samego koloru leżące w odległości 1 od siebie.
21. Udowodnić, że jeśli środkowa w trójkącie jest równa połowie boku, do którego tę środkową poprowadzono, to jeden z kątów tego trójkąta jest równy sumie dwóch pozostałych kątów tego trójkąta.
22. W każdym wierzchołku 2019-kąta foremnego wpisana jest liczba dodatnia, przy czym każda z tych liczb równa jest średniej arytmetycznej dwóch liczb wpisanych w sąsiednich wierzchołkach. Udowodnić, że we wszystkich wierzchołkach wpisana jest ta sama liczba.
23. W koszyku mamy 16 jabłek. Przy pomocy jednego ważenia można ustalić tylko ile ważą łącznie 3 jabłka. Waga ta nie podaje wyniku, gdy położymy na niej inną liczbę jabłek. Jak przy pomocy 8 ważeń ustalić ile łącznie ważą wszystkie jabłka?
24. Na prostej p mamy 5 punktów czerwonych, a na prostej q mamy 6 punktów zielonych. Proste p i q są różne i równoległe. Prowadzimy odcinki łączące niektóre punkty czerwone z pewnymi punktami zielonymi. Czy można to uczynić tak, aby różne punkty zielone były połączone z różną liczbą punktów czerwonych, natomiast każdy punkt czerwony był połączony z taką samą liczbą punktów zielonych?
25. Tablicę o wymiarach 5×5 podzielono na kwadraciki jednostkowe. W każdy kwadracik wpisujemy liczbę 1 lub -1 . Następnie obliczamy dla każdego wiersza i dla każdej kolumny iloczyn liczb znajdujących się w tym wierszu (to samo czynimy dla każdej kolumny). Czy może się zdarzyć, że suma tych dziesięciu iloczynów jest równa zero?

***Serdecznie zapraszamy na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2018/2019!***