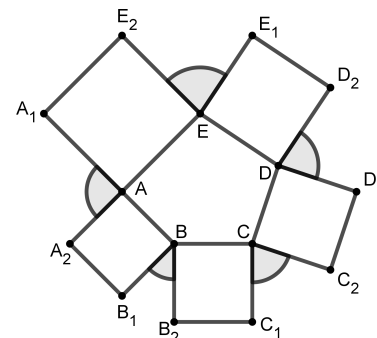


Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie

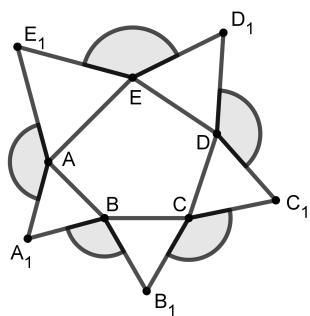
Prezent wakacyjny 2019 r.

- Wstaw trzy różne cyfry w miejsce liter A, K, R tak, aby zapis $\overline{RAK} + \overline{AKR} + \overline{KRA} = 777$ ilustrował poprawną operację dodawania. Podaj wszystkie możliwe komplety cyfr spełniające warunki zadania.
- Ile różnych kompletów cyfr A, B, C, D takich, że $A < B < C < D$ pozwala na utworzenie poprawnego zapisu operacji dodawania: $\overline{ABCD} + \overline{BCDA} + \overline{CDAB} + \overline{DABC} = 24442$?
- Znajdź wszystkie pary różnych od zera cyfr a, b takie, że prawdziwa jest równość: $(\overline{ab})^2 + 40 = (\overline{ba})^2 + 4000$.
- Liczba trzycyfrowa $\overline{abc}$ jest typu $\vee$, jeśli $a > b$ i $b < c$; liczba trzycyfrowa $\overline{xyz}$ jest typu $\wedge$, jeśli $x < y$ i $y > z$.
 - Ile jest liczb trzycyfrowych typu $\vee$, a ile typu $\wedge$?
 - Ile jest liczb typu $\vee$ (typu $\wedge$) większych od 250 i mniejszych od 840?
- Spośród liczb od 1 do 500 usunięto
 - wszystkie krotności liczby 2, wszystkie krotności liczby 3 i wszystkie krotności liczby 4;
 - wszystkie krotności liczby 2, wszystkie krotności liczby 3 i wszystkie krotności liczby 7.
 Ile liczb pozostało w każdym z tych przypadków?
- Oblicz sprytnie poniższe sumy:
 - $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$;
 - $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots + 85 + 86 - 87 - 88$;
 - $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \dots + 58 + 59 - 60$;
 - $1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + \dots + 58 - 59 + 60$.
- Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 9 i zawierających w swym zapisie tylko cyfry parzyste?
- Czy jest możliwe, aby w miejsce liter $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ w kwadracie (rysunek obok) wstawić liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 w taki sposób, aby iloczyn liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie był liczbą podzielną przez 4?
- Mikołaj spojrział na zegar elektroniczny – była godzina 12:43. Zwrócił uwagę na to, że jeśli cyfry ustawić „od najmniejszej do największej”, to tworzą one ciąg czterech kolejnych cyfr: 1, 2, 3, 4. Zauważył, że 2 godziny i 20 minut wcześniej była godzina 10:23 – i wówczas także cyfry ustawione „od najmniejszej do największej” stanowiły ciąg kolejnych cyfr: 0, 1, 2, 3. Ile jest w ciągu doby analogicznych sytuacji, tzn. cyfry wskazujące godzinę i minuty są różne i, ustawione „od najmniejszej do największej”, stanowią cztery kolejne cyfry? Jaki jest najkrótszy czas przejścia od jednego układu cyfr o podanej własności do innego układu o tej własności? Zakładamy, że obserwujemy zegar 24-godzinny.
- Młodszy brat Mikołaja, Paweł, nie zrozumiał zadania 9. Policzył za to, ile razy w ciągu doby pojawia się układ cyfr, w którym są aż trzy zera i jakaś cyfra różna od 0. Zbadał także, ile najdłużej trzeba czekać, aby od jednego takiego układu cyfr dotrzeć do drugiego. Jakie uzyskał wyniki?
- Na bokach AB, BC, CD, DE i EA pięciokąta wypukłego zbudowano kwadraty: AA_2B_1B , BB_2C_1C , CC_2D_1D , DD_2E_1E , EE_2A_1A , które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta $ABCDE$. Oblicz sumę miar tych kątów $\sphericalangle A_1AA_2$, $\sphericalangle B_1BB_2$, $\sphericalangle C_1CC_2$, $\sphericalangle D_1DD_2$, $\sphericalangle E_1EE_2$, które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta.
Wykonaj analogiczne ćwiczenie dla innych wielokątów wypukłych.
- Punkt E należy do boku AB , punkt F należy do boku BC kwadratu $ABCD$, przy czym $|EB| + |BF| = |AB|$. Udowodnij, że suma miar kątów $\sphericalangle BAF$, $\sphericalangle EDF$ i $\sphericalangle ECB$ jest równa 90° .
- Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano dwa punkty D i E takie, że $|AC| = |AD|$ i $|BC| = |BE|$. Oblicz miarę kąta $\sphericalangle DCE$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i



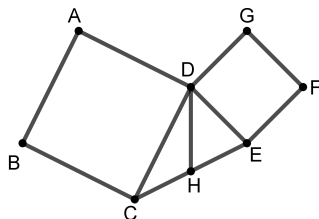
14.



Na bokach AB, BC, CD, DE i EA pięciokąta wypukłego zbudowano trójkąty równoboczne: $AA_1B, BB_1C, CC_1D, DD_1E, EE_1A$, które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta $ABCDE$. Oblicz sumę miar tych kątów $\sphericalangle A_1BB_1, \sphericalangle B_1CC_1, \sphericalangle C_1DD_1, \sphericalangle D_1EE_1, \sphericalangle E_1AA_2$, które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta.

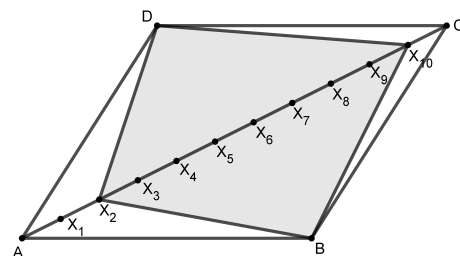
Wykonaj analogiczne ćwiczenie dla innych wielokątów wypukłych.

15.

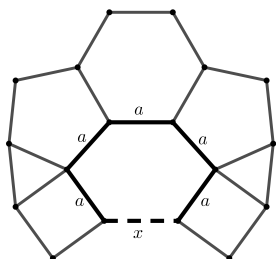


Czworokąty $ABCD$ i $DEFG$ są kwadratami o wspólnym wierzchołku D i nie posiadają innych wspólnych punktów (patrz rysunek). Niech H będzie środkiem odcinka CE . Uzasadnij, że $|AG| = 2|DH|$.

16. Przekątna równoległoboku o polu S została podzielona na 11 równych odcinków punktami $X_1, X_2, \dots, X_{10}$. Oblicz pole zacieniowanej figury.



17.



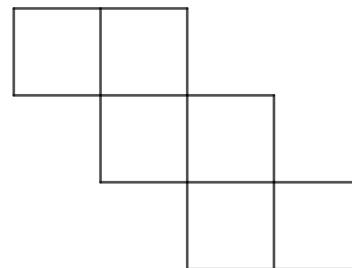
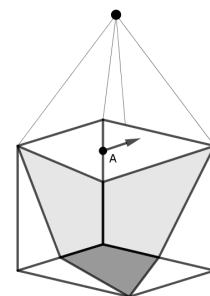
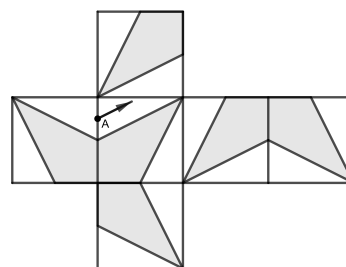
Z dwóch trójkątów równobocznych, dwóch kwadratów, dwóch pięciokątów foremnych i jednego sześciokąta foremnego o tej własności, że wszystkie boki wszystkich tych figur są długości a , składamy figurę, jak na rysunku. Wierzchołki kwadratów łączymy odcinkiem x . Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego sześciokąta o pięciu bokach długości a i jednym boku długości x . Zbadaj, który z odcinków jest dłuższy, a czy x ?

18. Z dwukolorowej siatki, przedstawionej na rysunku po lewej, sklejono sześcian i zawieszono na nitkach (rysunek po prawej).

a) Na sześcianie, na jednej z krawędzi, w punkcie A usiadła mucha i udała się na wędrowkę (wskazówka pokazuje kierunek drogi). Przyjęła zasadę, że wędruje tylko przez pole białe, przechodzi z jednej ściany na drugą zawsze przez krawędź i nigdy przez wierzchołek.

Ile różnych białych trójkątów odwiedzi mucha przy założeniu, że chce wędrować jak najdłużej? Czy trasa spaceru jest jednoznacznie wyznaczona? Czy mucha może dotrzeć do punktu A nie zwracając z trasy? Ponumeruj kolejne białe trójkąty, które odwiedza w czasie spaceru mucha.

b) Pokoloruj siatkę przedstawioną na rysunku obok w taki sposób, aby otrzymać po złożeniu taki sam sześcian jak powyżej.



19. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC , gdzie $|AC| = |BC|$, poprowadzono wysokość AD . Wiadomo, że $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC .

20. Dwieścienne kątów wewnętrznych $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle ABC$ trójkąta ABC przecinają się w punkcie O . Prosta równoległa do AB , przechodząca przez punkt O , przecina bok AC w punkcie D i bok BC w punkcie E . Udowodnij, że $|DE| = |AD| + |BE|$.

Życzymy udanych wakacji!