

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie
Klasa VII szkoły podstawowej
Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową
w roku szkolnym 2018/2019

1. Wyznaczyć liczby postaci $523 **$, które są podzielne przez każdą z liczb: 7, 8, 9.
2. Suma cyfr liczby dwucyfrowej oraz suma cyfr każdego z iloczynów tej liczby przez 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jest taka sama. Wyznaczyć wszystkie liczby dwucyfrowe o tej własności.
3. Uzasadnić, że w dowolnej liczbie pięćdziesięciocyfrowej, której zapis nie zawiera cyfry 0, można wykreślić pewną liczbę cyfr tak, aby pozostałe cyfry zapisane w tej samej kolejności tworzyły liczbę podzielną przez 101.
4. Ile liczb pierwszych znajduje się w każdym z poniższych ciągów?
(a) 23, 253, 2553, 25553, 255553, ...; (b) 41, 451, 4551, 45551, 455551, ...;
(c) 17, 187, 1887, 18887, 188887, ...
5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n ułamek $\frac{14n+3}{21n+4}$ jest nieskracalny.
6. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie całkowite x, y, z takie, że suma ich odwrotności jest równa 1.
7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że każda z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 występuje w zapisie dziesiętnym tylko jednej z liczb $6n, 9n, 13n$ i tylko raz.
8. Udowodnić, że $\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{4036} > \frac{1}{2}$.
9. Uzasadnić, że wśród każdych kolejnych dziesięciu liczb dodatnich całkowitych istnieje liczba, która nie ma wspólnego dzielnika różnego od 1 z żadną z pozostałych liczb.
10. Obliczyć wartość wyrażenia $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$, dla liczb dodatnich x, y, z takich, że $xyz = 1$.
11. Udowodnić, że jeśli środkowa w trójkącie jest równa połowie boku, do którego tę środkową poprowadzono, to jeden z kątów tego trójkąta jest równy sumie dwóch pozostałych kątów tego trójkąta.
12. Udowodnić, że jeżeli trójkąt ABC jest równoboczny, to dla dowolnego punktu M leżącego wewnątrz trójkąta, suma jego odległości od boków trójkąta jest niezależna od wyboru punktu M .
13. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AC na boku BC obrano taki punkt K , że $|\angle BAK| = 24^\circ$. Na odcinku AK wybrano taki punkt M , że $|\angle ABM| = 90^\circ$ oraz $|AM| = 2|BK|$. Wyznaczyć miary kątów trójkąta ABC .
14. Długość boku kwadratu $ABCD$ jest równa 1. Na boku BC obrano taki punkt M , a na boku CD taki punkt N , że obwód trójkąta MCN jest równy 2. Wyznaczyć miarę kąta MAN .
15. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 3$ oraz $|AD| = 1$, na boku AB obrano taki punkt E , że $|AE| = 2$. Pod jakim kątem przecinają się proste AC i DE ?
16. Na okręgu o promieniu 1 obrano 100 punktów. Udowodnić, że istnieje na tym okręgu punkt, dla którego suma jego odległości od obranych punktów jest większa od 100.

17. Niech a, b, c, d będą długościami kolejnych boków czworokąta o polu P . Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{4} \cdot (a + c) \cdot (b + d) \geq P$.
18. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B i D są proste i $|AB| = |BC|$. Na boku AD obrano punkt H taki, że odcinek BH jest prostopadły do boku AD oraz $|BH| = 1$. Wyznacz pole czworokąta $ABCD$.
19. Przy stole siedziało pięć dziewczynek i kilku chłopców. Na stole na talerzu leżało 30 bułek. Każda dziewczynka podała każdemu znajomemu chłopcu jedną bułkę z talerza. Następnie każdy chłopiec podał jedną bułkę z talerza każdej nieznałomej dziewczynce. Wtedy okazało się, że na talerzu już nie ma bułek. Ilu chłopców siedziało przy stole?
20. W parku rośnie 18 dębów. Na każdym z nich było tyle samo żołądzi. W pewnym momencie powiew wiatru strącił z pewnych dębów połowę żołądzi, z innych dębów $\frac{1}{3}$ żołądzi, a z pozostałych dębów nie spadł ani jeden żołądź. Wiadomo też, że ze wszystkich dębów spadła w sumie $\frac{1}{9}$ wszystkich żołądzi. Z ilu dębów wiatr nie strącił ani jednego żołądza?
21. Na stole mamy 2019 monet. Andrzej i Bartek grają w następującą grę: kolejno i na przemian podchodzą do stołu i biorą pewną liczbę monet, przy czym Andrzej może wziąć nieparzystą liczbę monet i liczba ta może być jedną spośród 1, 3, 5, ..., 99; Bartek może wziąć parzystą liczbę monet, przy czym liczba ta może być jedną z liczb 2, 4, 6, ..., 100. Przegrywa ten z chłopców, który nie może wykonać już ruchu. Grę zaczyna Andrzej. Który z chłopców ma strategię wygrywającą?
22. Zapisujemy najpierw liczbę 2^{100} (zapis dziesiętny), a następnie dopisujemy do niej liczbę 5^{100} . Z ilu cyfr składa się zapis dziesiętny tak utworzonej liczby?
23. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że liczba $n^2 + n + 1$ jest podzielna przez 155?
24. *Zadanie Newtona.* Na całej łące trawa rośnie jednakowo szybko i jednakowo gęsto. Wiadomo, że 70 krów zjadłoby trawę z całej łąki w ciągu 24 dni, a 30 krów – w ciągu 60 dni. Ilu krów potrzeba, aby trawa z tej łąki została przez nie zjedzona w ciągu 96 dni? (Zakładamy, że krowy zjadają trawę równomiernie.)
25. W każdym wierzchołku 2019-kąta foremego wpisana jest liczba dodatnia, przy czym każda z tych liczb równa jest średniej arytmetycznej dwóch liczb wpisanych w sąsiednich wierzchołkach. Udowodnić, że we wszystkich wierzchołkach jest wpisana ta sama liczba.
26. W spotkaniu Koła młodych matematyków wzięło udział 20 uczniów. Okazało się, że wśród każdego czworo uczestników spotkania był co najmniej jeden uczestnik, który znał pozostałych trzech uczniów z tej czwórki. Udowodnić, że wśród uczestników Koła jest uczeń, który zna wszystkich pozostałych uczestników Koła.
27. Liczby 1, 2, 3, ..., 19 ustawiono w pewnym porządku: $a_1, a_2, \dots, a_{19}$. Następnie każdą z liczb a_i pomnożono przez i , gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, 19$. Spośród dziewiętnastu iloczynów $i \cdot a_i$ wybrano największy. Udowodnić, że niezależnie od ustawienia wybrany iloczyn jest nie mniejszy niż 100.

*Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2018/2019!*