

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej
Zadania przygotowawcze do II spotkania etapu rejonowego
w dniu 18 stycznia 2020 r.

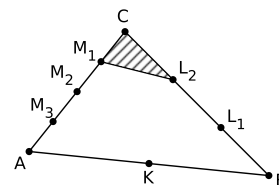
Tematyka: 1. Obliczanie pól wielokątów. 4. Kąty wierzchołkowe, naprzemianległe, przyległe i odpowiadające.
 2. Układ współrzędnych. 5. Kąty zewnętrzne i wewnętrzne różnych wielokątów.
 3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

- Wierzchołki czworokąta $ABCD$ mają współrzędne: $A = (-5, 8)$, $B = (13, 0)$, $C = (5, -4)$, $D = (-7, -2)$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.
- W czworokącie $ABCD$ miary kątów wewnętrznych DAB , ABC , BCD oraz CDA pozostają w stosunku $3 : 5 : 7 : 5$. Poprowadzono dwusieczne kątów **zewnętrznych** tego czworokąta. Dwusieczne kątów o wierzchołkach A i B przecięły się w punkcie K , dwusieczne kątów o wierzchołkach B i C przecięły się w punkcie L , dwusieczne kątów o wierzchołkach C i D przecięły się w punkcie M , dwusieczne kątów o wierzchołkach D i A przecięły się w punkcie N . Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta $KLMN$. Jaką figurą jest ten czworokąt?
- Wierzchołki trójkąta ostrokątnego ABC mają współrzędne całkowite, przy czym $A = (-3, 1)$, $B = (-3, -4)$. Pole trójkąta ABC jest równe 35. Wypisz współrzędne wszystkich punktów, w których może znajdować się wierzchołek C . Czy wśród trójkątów spełniających warunki zadania występuje trójkąt równoramienny?
- Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = 3a - b + 2$ oraz $a \square b = a \cdot (1 - b)$. Czy liczba $m = (-4) \square [(-3) \triangle (-5)]$ spełnia równanie $(x + 2) \triangle 4 = 4 \square 9$?
- W trapezie równoramiennym $ABCD$ o dłuższej podstawie AB , przekątna AC jest dwusieczną kąta BAD . Wiadomo, że kąty DAB i ACB mają równe miary. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O .
 - Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkątach: AOB , BOC , COD i DOA .
 - Wskaż wszystkie odcinki, których długość jest równa długości podstawy CD .
- W trójkącie ABC punkt K jest środkiem boku AB , punkty L_1, L_2 leżą na boku BC , przy czym $|BL_1| = |L_1L_2| = |L_2C|$, a punkty M_1, M_2, M_3 leżą na boku CA , przy czym $|CM_1| = |M_1M_2| = |M_2M_3| = |M_3A|$. Wiadomo, że pole trójkąta CM_1L_2 jest równe 2. Oblicz pole trójkąta ABC oraz pole trójkąta M_3AK .
- Obwód prostokąta jest równy 360 cm. Dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych dzieli dłuższy bok prostokąta w stosunku $2 : 5$. Oblicz długości boków prostokąta oraz iloraz pól figur, na które dwusieczna ta rozcięła prostokąt. Rozpatrz wszystkie przypadki.
- W trójkącie ABC o miarach kątów wewnętrznych CAB , ABC , BCA , pozostających (w podanej kolejności) w stosunku $2 : 3 : 4$, poprowadzono dwusieczne kątów wewnętrznych, które przecinają się w punkcie O . Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie A_1 , dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie B_1 , dwusieczna kąta BCA przecina bok AB w punkcie C_1 . W ten sposób utworzono wiele różnych trójkątów, do których zaliczamy między innymi trójkąt AC_1C , trójkąt BA_1O , trójkąt ABC itd. Wskaż wśród wszystkich powstałych trójkątów:
 - dwa rójkąty równoramienne,
 - parę trójkątów, które mają taki sam zestaw miar kątów wewnętrznych.
- Punkty $A = (-8, 3)$ i $D = (-6, -4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $X = (-3, 7)$ jest środkiem boku AB . Podaj współrzędne wierzchołków B i C . Oblicz pole równoległoboku.
- Punkt D należy do boku AB trójkąta ABC i jest różny od punktów A i B . Uzasadnij, że iloraz pól trójkątów ACD i DCB jest równy ilorazowi długości odcinków AD i DB .
- Uzupełnij kwadraty magiczne:

$-2,1x^2 + 3,4x$		
$-0,3x^2 + 2,8x$	$4,5x^2 - 2x$	

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y$		$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}y$
	$-x - \frac{1}{4}y$	

- Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = a + b - 4$ oraz $a \square b = 3a + 4b$.
 - Oblicz: $32 \triangle 8$, $(-6) \triangle 11$, $13 \square 7$, $(-4) \square (-10)$, $(4 \square 11) \triangle (20 \square 13)$, $(-2) \square [(-3) \triangle (4 \square 5)]$.
 - Wykonaj operacje: $(3 \square x) \triangle (-2)$, $4 \square (x \triangle 2)$, $(4x - 1) \triangle (x - 2)$, $(1 - 2x) \triangle [3x \square (-2)]$;
 - Rozwiąż równania: $4 \triangle x = 11$, $x \triangle x = 20$, $x \square 23 = 125$, $23 \square x = 125$, $x \square (2x) = 70$.



13. Rozwiąż zadanie analogiczne do zadania 2. w przypadku, gdy czworokąt jest $ABCD$ jest a) prostokątem, b) równoległobokiem o ostrym kącie α , c) trapezem równoramiennym o kącie α przy dłuższej podstawie.
14. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$. Punkt D należy do ramienia BC . Kąt BAD ma miarę trzykrotnie **większą** od miary kąta DAC . Wiadomo też, że odcinki AD i DC są tej samej długości. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkątów ABD i ADC .
15. Punkt E należy do boku AB równoległoboku $ABCD$ i nie jest wierzchołkiem tego równoległoboku. Prosta DE przecina przekątną AC w punkcie X . Uzasadnij, że pola trójkątów AXD i EXC są równe.
16. Miary **zewnętrznych** kątów trójkąta pozostają w proporcji $4 : 3 : 2$. Znajdź miarę kąta między dwusiecznymi wychodzącymi z wierzchołków mniejszych kątów **wewnętrznych** tego trójkąta.
17. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej AC wybrano punkt X różny od punktu przecięcia przekątnych. Przez punkt X poprowadzono prostą m równoległą do boku AB , przecinającą bok AD w punkcie M i bok BC w punkcie N , oraz prostą n równoległą do boku AD , przecinającą bok AB w punkcie P i bok DC w punkcie Q . Uzasadnij, że czworokąty $MXQD$ i $PBNX$ mają równe pola.
18. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD mamy $|BC| = |CD| = |DA|$ i przekątna AC jest prostopadła do boku BC . Oblicz miary kątów tego trapezu.
19. Punkty $A = (-2, 4)$ i $B = (4, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , którego pole jest równe 24. Znajdź współrzędne punktu C wiedząc, że: a) odcięta punktu C jest równa -3 , b) trójkąt ABC jest równoramienny, c) trójkąt ABC jest prostokątny, d) trójkąt ABC jest ostrokątny.
20. Dane są punkty o współrzędnych: $(-4, -2)$, $(3, -2)$, $(-1, 4)$. Wyznacz wszystkie równoległoboki, których wierzchołki znajdują się w podanych punktach i podaj współrzędne tych wierzchołków. Który z tych równoległoboków ma największe pole?
21. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątna AC dzieli ten czworokąt na trójkąty ACB i ACD . Uzasadnij, że iloraz wysokości BB_1 trójkąta ACB i wysokości DD_1 trójkąta ACD jest równy ilorazowi pól trójkątów ACB i ACD .
22. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-25, -30)$, $B(50, 0)$, $C(65, 40)$ i $D(0, 15)$. Przekątna AC dzieli czworokąt na dwa trójkąty: ABC i ADC . Oblicz iloraz długości wysokości h_B i h_D poprowadzonych w tych trójkątach z wierzchołków B i D do podstawy AC .
23. Punkty K , L , M leżą odpowiednio na bokach AB , BC i CA trójkąta ABC , przy czym $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{1}{3}$. Punkt P leżący wewnątrz trójkąta połączono odcinkami ze wszystkimi wymienionymi punktami. Jaką część pola trójkąta ABC stanowi łączne pole trójkątów APK , BPL i CPM ?
24. Równoległobok $ABCD$ ma pole równe 60. Punkt E należy do boku AB i $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$. Punkt F należy do boku BC i $\frac{|CF|}{|FB|} = \frac{2}{3}$. Oblicz pole trójkąta DEF .
25. Środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego $ABCD$ połączono odcinkami, tworząc cztery czworokąty. Pole „małego” czworokąta zawierającego punkt A ma pole P_A , podobnie pole „małego” czworokąta zawierającego punkt B jest równe P_B , a pole „małego” czworokąta zawierającego punkt C jest równe P_C . Oblicz pole czwartego „małego” czworokąta.
26. Na bokach AB, BC, CD, DE i EA pięciokąta wypukłego zbudowano kwadraty: AA_2B_1B , BB_2C_1C , CC_2D_1D , DD_2E_1E , EE_2A_1A , które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta $ABCDE$. Oblicz sumę miar tych kątów $\sphericalangle A_1AA_2$, $\sphericalangle B_1BB_2$, $\sphericalangle C_1CC_2$, $\sphericalangle D_1DD_2$, $\sphericalangle E_1EE_2$, które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta. Wykonaj analogiczne ćwiczenie dla innych wielokątów wypukłych.
27. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano dwa punkty D i E takie, że $|AC| = |AD|$ i $|BC| = |BE|$. Oblicz miarę kąta $\sphericalangle DCE$.
28. Na okręgu o środku O znajdują się punkty $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ o tej własności, że kąty $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, $\dots$, $\sphericalangle A_9OA_{10}$, $\sphericalangle A_{10}OA_1$ mają miarę 36° . Punkty te są wierzchołkami dziesięciokąta $A_1A_2A_3 \dots A_{10}$. Oblicz miary kątów przecięcia się przekątnych:
a) A_1A_3 i A_2A_4 ; b) A_1A_3 i A_2A_5 ; c) A_1A_3 i A_2A_6 .

Uwaga I. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań: *Liga Zadaniowa*, str. 69-73 (zad. 1-29, 34, 36, 45, 46, 48), str. 79-87 (zad. 101, 125, 126, 128, 130, 131, 141, 142, 163, 168, 169, 172-178, 182, 183); *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 47-52, 370-457, 534-556; *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, str. 145-166; *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Kąty, Pola i obwody.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 392, 396, 403, 410, 425, 435, 444, 452.

Uwaga II: W soboty, począwszy od 12 października, o godzinie 10:30 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej <http://liga.mat.umk.pl> Serdecznie zapraszamy.