

**Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki**  
**Województwo kujawsko-pomorskie**

**Klasa VII szkoły podstawowej**

**Zadania przygotowawcze do III spotkania etapu rejonowego w dniu 28 marca 2020 r.**

**Tematyka:** 1. Zadania logiczne. 3. Równania w zadaniach tekstowych.  
2. Przekształcanie wzorów. 4. Potęgi i pierwiastki.

1. Ze wzoru  $c = \frac{3a+b}{2a+5b}$  wyznaczyć zmienną  $a$ , a następnie obliczyć wartość  $a^7$ , gdy  $b = (-0,75)^2$  i  $c = -3$ .
2. Mały dźwig przeładowuje pewną ilość towaru w ciągu 12 godzin. Tę samą ilość towaru średni dźwig przeładowuje w ciągu 8 godzin, a duży dźwig w ciągu 5 godzin. Wspomnianą ilość towaru przez 2 godziny przeładowywały równocześnie dźwigi: mały i średni. Czy wystarczy dodatkowych 2 godzin na to, by przeładunek dokończyły dźwigi: średni i duży, podczas gdy mały dźwig zostanie wyłączony z pracy?
3. Oblicz:  $\frac{12^4 \cdot 24^4}{3 \cdot 6^8 \cdot 4^6 - 6^7 \cdot 4^7 - 3 \cdot 6^6 \cdot 4^8}$ .
4. Oblicz: a)  $\frac{10\sqrt{1+10\sqrt{64}}}{\sqrt[3]{444-101} + \sqrt[3]{4\sqrt{144}-\sqrt{441}}}$  b)  $\frac{\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27} + 15 \cdot \sqrt[3]{64}}}{\sqrt[3]{36 \cdot \sqrt[4]{48 \cdot 27}}} \cdot (2\sqrt{3})^2$ .
5. Janek powiedział do swojego brata: „Gdybyś oddał mi trzecią część swoich oszczędności, to miałbyś po tyle samo pieniędzy”. W tym momencie do pokoju weszła mama i wręczyła każdemu z chłopców po 60 złotych „kieszonkowego”. Wówczas Janek powiedział do brata: „Teraz miałbyśmy po tyle samo pieniędzy, gdybyś mi oddał czwartą część swoich oszczędności”. Ile pieniędzy miał przed wypłatą „kieszonkowego” każdy z braci? O ile procent wzrosły po wypłacie „kieszonkowego” oszczędności każdego z chłopców?
6. W grupie ankietowanych  $n$  osób  $\frac{2}{5}$  wszystkich uczestników ankiety zadeklarowało się jako wielbiciel literatury. Równocześnie  $\frac{3}{10}$  wszystkich ankietowanych oświadczyło, że potrafi grać na przynajmniej jednym instrumencie muzycznym. Wśród wielbicieli literatury co czwarta osoba umie grać na jakimś instrumencie muzycznym. Jaki procent osób niebędących wielbicielami literatury stanowią osoby grające na jakimś instrumencie muzycznym?
7. Wiedząc, że  $\frac{2a+b}{3b} = \frac{1}{2}$ , oblicz  $\frac{(a - \frac{1}{2}b)^2 - (2a + \frac{3}{4}b)^2}{4a^2 - b^2}$ .
8. Każdy z chłopców, Jurek, Krzys i Marek, posiadał pewną liczbę szklanych kulek. W pewnej chwili wykonali oni następującą operację. Najpierw Jurek ze swojego zapasu kulek dał Krzysowi i Markowi po tyle kulek, że stan ich posiadania potroił się. Następnie Krzys uszczuplił swoje zapasy przekazując Jurkowi i Markowi tyle kulek, że każdy z tych chłopców miał ich cztery razy więcej niż przed podarunkiem Krzysia. Na koniec Marek dał Jurkowi i Krzysowi ze swojego zapasu po tyle kulek, ile każdy z nich aktualnie miał. W rezultacie każdy z chłopców miał po 72 kulki. Ile kulek miał każdy z chłopców na początku?
9. Do podwieczorku urodzinowego dwóch bliźniaczek zasiadły obie jubilatki wraz z czworgiem gości. Średni wiek wszystkich uczestników podwieczorku był równy 18 lat. Gdy jubilatki wyszły na chwilę z pokoju, by otworzyć drzwi spóźnionym gościom, średnia wieku czterech osób pozostałych w pokoju była równa 22 lata. W jakim wieku były bliźniaczki?
10. Hania ma pięć figurek krasnoludków, z których każdy ma ubranko innego koloru: żółte, niebieskie, pomarańczowe, czerwone i fioletowe. Każdego dnia Hania zmienia ustawienie krasnoludków stojących w rzędzie na półce pamiętając, że krasnoludki mają swoje przyzwyczajenia.
  - 1) Fioletowy jest samotnikiem i lubi stać z samego brzegu z lewej strony, bo stamtąd ma dobry widok na świat.
  - 2) Niebieski nie może stać obok fioletowego, bo obaj nieustannie się kłócą.
  - 3) Żółty i Czerwony nie rozstają się ani na chwilę wspólnie obmyślając kolejne psoty.
  - 4) Pomarańczowy boi się przeciągów, więc woli mieć sąsiadów z obu swoich stron.Na ile różnych sposobów Hania może ustawić swoje krasnoludki tak, by wszystkie ich życzenia zostały spełnione?
11. Ze wzoru wyznaczyć zmienną  $a$ : a)  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ , b)  $P = 2ab + 2ac + 2bc$ , c)  $S = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$ ,  
d)  $t = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ , e)  $x = \frac{a+3}{a+1}$ , f)  $c = \frac{a \cdot b}{a+b}$ , g)  $c = \frac{3a+b}{\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b}$ .
12. Wiedząc, że  $\frac{a-4b}{b} = 7$ , oblicz: a)  $\frac{2a+3b}{a}$ , b)  $\frac{a^2-4ab-16b^2}{a^2+b^2}$ , c)  $\frac{(a+2b)^2 - (2a-3b)^2}{(5b-a)^2}$ .
13. Wiedząc, że  $a^2 = a + 1$ , uzasadnij, że  $a^3 = 2a + 1$ ,  $a^4 = 3a + 2$ ,  $a^5 = 5a + 3$ .
14. Zosia przechowuje swoje oszczędności tylko w monetach dwuzłotowych i pięciozłotowych. Wartość wszystkich dwuzłotówek stanowi czwartą część całych jej oszczędności, a pięciozłotówek ma 36. Ile pieniędzy ma Zosia?

15. Do końca doby zostało  $\frac{3}{5}$  liczby godzin, które upłynęły od początku doby. Która jest godzina?
16. Janek jest o 3 lata młodszy od swego brata Maćka. Maciek ma obecnie cztery razy tyle lat, ile miał Janek wtedy, kiedy Maciek miał tyle lat, ile teraz ma Janek. Ile lat ma każdy z chłopców?
17. Dla jakich wartości  $d$  z odcinków długości  $4d - 2$ ,  $2d + 6$  i  $6d - 5$  można utworzyć trójkąt równoramienny?
18. Pociąg, jadąc ze stałą prędkością, przejeżdża przez most długości 450 m w ciągu 45 sekund. Jadąc z tą samą prędkością w ciągu 15 sekund pociąg ten mija słup telegraficzny. Jaka jest długość pociągu i jaka jest jego prędkość w km/godz?
19. Andrzej jest **lżejszy** o 20% od Bartka, Bartek jest **cięższy** o 10% od Radka. Najlżejszy z chłopców waży 44 kg. Ustaw chłopców w kolejności od najlżejszego do najcięższego i podaj, ile waży każdy z nich.
20. Znajdź wszystkie liczby całkowite podzielne przez 3, które mają dwie następujące własności:  
1) pomniejszenie szukanej liczby o 3 oznacza pomniejszenie jej o więcej niż 2,5%;  
2) powiększenie szukanej liczby o 9 oznacza powiększenie jej o mniej niż 8%.
21. Brat i siostra otrzymali od rodziców pewną ilość pieniędzy. Jeśli siostra odda bratu 20% swojej części, to brat będzie miał o 50% więcej pieniędzy niż siostra. Które dziecko otrzymało od rodziców więcej pieniędzy?
22. Okrągły stół nakryto dla pięciu osób, przy czym nakrycie dla każdej z osób, która zasiądzie przy stole, jest innego koloru: jedno żółte, drugie niebieskie, trzecie zielone, czwarte fioletowe i piąte pomarańczowe. Do stołu zasiadają panowie  $X$  i  $Y$  oraz panie  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Pan  $X$  nigdy nie siada obok pani  $A$ . Na ile sposobów można rozmieścić przy stole te pięć osób tak, aby pan  $X$  i pani  $A$  nie siedzieli obok siebie?
23. Oblicz: a)  $\frac{4 \cdot 2^{20} + \frac{1}{4} \cdot 8^8 + 2 \cdot 4^{11}}{2^{22} + 4 \cdot 16^5}$ , b)  $\frac{8^3 \cdot 6^5}{8 \cdot 6^8 - 6 \cdot 12^5}$ , c)  $\frac{(3^2 + 5^2 + 6^2)^7}{(7^6 + 7^8)(3 \cdot 5^5 + 5^7)}$ ,  
d)  $\frac{2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}}$ , e)  $\frac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$ , f)  $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$ .
24. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę większą: a)  $(1,5)^{64}$  i  $6^{16}$ , b)  $81^{64}$  i  $4^{192}$ , c)  $25^{27}$  i  $8^{42}$ .
25. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:  $2^{90}$ ,  $3^{60}$ ,  $5^{45}$ ,  $8^{45}$ ,  $16^{30}$ .
26. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę mniejszą: a)  $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$  i  $10^{55}$ , b)  $10^{55}$  i  $2^{200}$ .
27. Uzasadnij, że liczba  $n$  jest podzielna przez liczbę  $k$ :  
a)  $n = 7^{2020} - 7^{2018}$  i  $k = 3$ , b)  $n = 3^{80} + 3^{82} + 3^{84} + 3^{86}$  i  $k = 41$ .
28. Przez jaką najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią należy przemnożyć liczbę 2016, aby otrzymać kwadrat liczby naturalnej (sześcián, czwartą potęgę, ...)?
29. Podaj przynajmniej 2 pary liczb całkowitych dodatnich  $m$  i  $n$  takich, że  $2 \cdot n^3 = m^4$ .
30. Podaj cyfrę jedności liczb:  $2^{100}$ ,  $3^{531}$ ,  $27^{345}$ ,  $234^{567} \cdot 567^{890}$ ,  $2^{2018} + 3^{2019} + 4^{2020}$ ,  $9^{888} + 7^{666} \cdot 4^{333}$ .
31. Wypisz wszystkie dzielniki dodatnie podanych liczb:  $3^5$ ,  $2^8$ ,  $7^{15}$ ,  $6^2$ ,  $15^3$ ,  $2^5 \cdot 3$ ,  $3^4 \cdot 5^2$ ,  $2^4 \cdot 7^3$ ,  $7^3 \cdot 11 \cdot 13^2$ .
32. Ile różnych dzielników dodatnich ma każda z podanych liczb:  $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7$ ,  $12^3 \cdot 14^4$ ,  $33^4 \cdot 34^3 \cdot 35^2 \cdot 36$ ,  $6^{12} \cdot 4^{10} + 6^{11} \cdot 4^{11} + 6^{10} \cdot 4^{12}$ ?
33. Oblicz: a)  $\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{729} + 9 \cdot \sqrt[3]{64}} - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{625} + 4 \cdot \sqrt[4]{81}}$ , b)  $(3\sqrt[3]{56} + 2\sqrt[3]{189} - 2\sqrt[3]{25 \cdot 35})^3$ ,  
c)  $\frac{\sqrt[5]{3125} \cdot \sqrt[4]{6561} \cdot \sqrt{729}}{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{15625} \cdot \sqrt{324}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{729}}$ , d)  $\frac{(\sqrt{6})^5 \cdot (\sqrt[3]{18})^6}{(\sqrt{8})^3 \cdot (\sqrt[3]{9})^{12}} \cdot \sqrt{3}$ , e)  $\frac{[3 \cdot (\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} + 1)]^2}{(\sqrt{5})^4 \cdot [(\sqrt{2})^6 + 1]}$ .
34. Porównaj liczby: a)  $\sqrt[3]{\frac{2020}{2021}}$  i  $\sqrt[3]{\frac{2019}{2020}}$ ; b)  $\sqrt{2 \cdot 4^5 + 2^{11}}$  i  $2^6$ ; c)  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt[3]{3}$ ; d)  $\sqrt[4]{3}$  i  $\sqrt[5]{4}$ .

**Uwaga I.** W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań:

– *Liga Zadaniowa*, str. 32-33 (zad. 82-100), str. 46-68, str. 157 (zad. 21);

– *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 19-23, 27, 29, 30, 37-39, 42-46, 53-61, 99-153, 295-296, 313-315, 593, 594, 598, 605, 607, 609, 614, 619;

– *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, rozdziały: Logika, Prędkość, droga, czas, Równania, Zadania o wieku;

– *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Równania i nierówności, Procenty, Zadania logiczne.

**Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki:**

– *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 120, 122, 149, 169, 172, 206, 225, 233, 596.

**Uwaga II.** W soboty, począwszy od 12 października, w godz. 10:30 - 12:00, na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej <http://liga.mat.umk.pl>. Serdecznie zapraszamy.