

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie
Prezent wakacyjny 2021 r.

1. Suma cyfr liczby trzycyfrowej jest równa 26. Ile wynosi iloczyn cyfr tej liczby?
2. Suma cyfr liczby 2021 jest równa 5. Ile jest liczb czterocyfrowych o sumie cyfr równej 5? Jeśli liczby te ustawimy w porządku malejącym, to na którym miejscu znajdzie się liczba 2021?
3. Ile cyfr w zapisie dziesiętnym liczby $2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5^{14}$ jest różnych od zera?
4. Suma pięciu kolejnych liczb całkowitych jest równa 10^{2021} . Wyznacz liczbę środkową w zestawie tych pięciu liczb.
5. Udowodnić, że nie istnieje liczba czterocyfrowa, dla której różnica między nią i liczbą zapisaną przy pomocy tych samych cyfr w odwrotnym porządku jest równa 2021.
6. Wyznaczyć sumę cyfr liczby $10^{2021} - 2021$.
7. Wyznaczyć sumę $a + b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi takimi, że $2^a - 2^b = 240$.
8. Wyznaczyć liczbę $20212020 \cdot 20212022 - 20212017 \cdot 20212025$.
9. Mamy trzy liczby całkowite dodatnie. Rozważamy po kolei wszystkie iloczyny sumy dwóch z nich przez trzecią liczbę. W wyniku otrzymaliśmy liczby 20, 18, 14. Wyznacz sumę tych trzech liczb.
10. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne x , które spełniają równość $x^3 - x = 2021$.
11. Uzasadnić, że iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do 2021 nie może być kwadratem liczby naturalnej.
12. Cyfry a, b są różne i różne od zera. Rozstrzygnąć czy jeśli liczba trzycyfrowa $\overline{aba}$ jest podzielna przez 13, to liczba $\overline{bab}$ jest także podzielna przez 13.
13. Ile liczb trzycyfrowych można przedstawić w postaci sumy $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, gdzie a, b, c są cyframi?
14. Wyznaczyć liczbę naturalną n , dla której średnia arytmetyczna liczb: $1, 2, 3, \dots, n$ jest równa 2021.
15. Ile jest ułamków nieskracalnych, w których suma licznika i mianownika jest równa 2021?
16. Obliczyć sumę $\left(\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \frac{7+8}{9} + \dots + \frac{2020+2021}{2022}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{674}\right)$.
17. Wyznaczyć wszystkie liczby dwucyfrowe równe podwojonemu iloczynowi swoich cyfr.
18. W trójkącie ABC na boku AB obrano punkt P taki, że $CP = PB$ oraz $CA = PA$. Wiadomo, że miara kąta ACB jest równa 60° . Wyznaczyć miarę kąta ABC .
19. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości: $BC = AD$, $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$ i $\angle CAD = 50^\circ$. Wyznaczyć miarę kąta ADC .
20. Trzy różne punkty A, B, C leżą na prostej m , zaś punkt D leży poza prostą m . Udowodnić, że $P_{ABD} : P_{ACD} = AB : AC$.

21. Udowodnić, że w trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD zachodzi równość $P_{AOD} = P_{BOC}$, gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD tego trapezu.
22. Udowodnić, że w czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość $P_{AOB} \cdot P_{COD} = P_{AOD} \cdot P_{BOC}$, gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD tego czworokąta.
23. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD w czworokącie $ABCD$. Obliczyć pole P_{ABCD} , jeśli $P_{ABC} = 7$, $P_{BCD} = 12$ i $P_{BMC} = 5$.
24. Niech O będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD w czworokącie wypukłym $ABCD$. Pokazać, że jeśli $P_{AOD} = P_{BOC}$, to czworokąt jest trapezem.
25. W prostokącie $ABCD$ obrano punkty: na boku AB punkt E oraz na boku CD punkt F przy czym $AE = 4$ i $CF = 2$. Przekątna AC przecina odcinek EF w punkcie S . Wyznaczyć stosunek pól trójkątów AES i CES .
26. W trapezie prostokątnym $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne trapezu przy wierzchołkach A i D są proste oraz $AD = AB + CD$, obrano na boku AD taki punkt M , że $AM = CD$ oraz $MD = AB$. Wyznaczyć miarę kąta BMC .
27. W trójkącie prostokątnym iloczyn długości wysokości jest dwa razy mniejszy od iloczynu długości boków tego trójkąta. Wyznaczyć miary kątów w tym trójkącie.
28. Tablicę o wymiarach 6×6 podzieloną na 36 jednostkowych kwadracików wypełniamy liczbami $1, 2, 3, \dots, 36$ wpisując w każdy kwadracik jedną z tych liczb, przy czym w różne kwadraciki wpisujemy różne liczby. Uzasadnić, że niezależnie od sposobu wpisywania zawsze można znaleźć dwa sąsiednie kwadraciki, o wspólnym boku, w których wpisane liczby różnią się co najmniej o 4.
29. Na tablicy wypisano liczby $1, 2, 3, \dots, 2021$. Następnie ścieramy z tablicy wybrane dwie liczby, a na tablicy wpisujemy sumę lub różnicę startych liczb. Proces ten kontynuujemy tak długo aż na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Oczywiście ścierać możemy także liczby wpisane na tablicy w trakcie tego procesu. Czy ostatnią liczbą może być zero?
30. Wewnątrz dwudziestokąta wypukłego obrano 15 punktów, przy czym żadne trzy punkty spośród tych 35 punktów (wierzchołki dwudziestokąta i wybrane punkty) nie leżą na jednej prostej. Dwudziestokąt podzielono na trójkąty, których wierzchołkami są tylko pewne punkty z tych 35 punktów oraz każdy z tych punktów jest wierzchołkiem któregoś trójkąta z tego podziału. Ile trójkątów mamy w tym podziale?
31. Tablicę o wymiarach 10×10 podzielono na kwadraciki jednostkowe. W każdy kwadracik wpisano liczbę tak by liczba ta była równa średniej arytmetycznej liczb wpisanych w kwadraciki sąsiednie, przy czym dwa kwadraciki są sąsiednie, gdy mają wspólny bok. Jedną z wpisanych liczb jest 5. Wyznaczyć największą liczbę i najmniejszą liczbę w tej tablicy.
32. Na stole położonych jest 25 patyczków. Dwaj chłopcy kolejno i na przemian wykonują ruchy polegające na tym, że każdy z nich w jednym ruchu może zabrać ze stołu 1 lub 2 patyczki. Wygrywa ten z chłopców, który zabiera ostatecznie patyczki. Który z chłopców – zaczynający czy ten drugi – ma strategię wygrywającą to znaczy, może on zapewnić sobie zwycięstwo niezależnie od strategii jaką stosuje jego rywal.

Rozwiązać ten sam problem w przypadku, gdy na stole mamy 30 patyczków.

33. Dwaj chłopcy grają w następującą grę: Kolejno i na przemian wpisują na tablicy liczby naturalne zgodnie z następującą regułą. Zaczynający grę pisze na tablicy liczbę 2. Następnie jego rywal wpisuje na tablicy liczbę większą niż 2 ale jednocześnie mniejszą niż dwukrotność liczby 2, w tym przypadku będzie to liczba 3. Po każdym ruchu jednego z grających, w którym wpisał on na tablicy liczbę a , jego przeciwnik wpisuje liczbę większą niż a ale jednocześnie mniejszą niż $2a$. Wygrywa ten z grających, który napisze na tablicy liczbę 2021. Który z graczy ma strategię wygrywającą – zaczynający grę czy jego przeciwnik?
34. W dwóch pojemnikach znajdują się kule. W pierwszym pojemniku jest ich 50, a w drugim mamy 60 kul. Dwaj gracze grają w następującą grę: kolejno i na przemian biorą oni kule. W jednym ruchu graczowi wolno wziąć dowolną liczbę kul ale tylko z jednego a pojemników. Wygrywa ten z graczy, który bierze ostatnie kule. Który z graczy ma strategię wygrywającą – zaczynający grę czy jego przeciwnik?
35. Dwaj uczniowie klasy 7. tworzą liczbę naturalną A) dwudziestocyfrową, B) trzydziestocyfrową według następującej reguły: zaczynający pisze pierwszą cyfrę liczby patrząc od lewej strony, jego rywal pisze drugą cyfrę od lewej strony i tak kolejno i na przemian wpisują cyfry tworzonej liczby. Obydwaj mogą tylko posługiwać się cyframi 1, 2, 3, 4, 5. Zaczynający wygrywa, jeśli utworzona liczba nie dzieli się przez 9, natomiast jego rywal jest zwycięzcą, gdy otrzymana liczba dzieli się przez 9. Który z grających ma strategię zwycięską?

Życzymy udanych wakacji!

Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej w roku szkolnym 2021/2022!