

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie
Prezent wakacyjny 2022 r.

1. Liczby a , $a+1$, $a+2$ są długościami boków pewnego trójkąta. Jaki warunek musi spełniać liczba a ?
2. W liczbie 123456789101112...5657585960 skreślić 100 cyfr tak, by pozostałe cyfry bez zmiany porządku utworzyły największą liczbę ze wszystkich możliwych do uzyskania w ten sposób liczb.
3. Czy dwusieczne dwóch kątów w trójkącie mogą się przecinać pod kątem prostym?
4. Która z liczb $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ czy $\left(\frac{3}{10}\right)^{20}$ jest większa?
5. W zapisie dziesiętnym liczby wystąpiły tylko 52 jedynki. Czy liczba ta dzieli się przez 111?
6. Dla jakich liczb naturalnych a i b zachodzi równość $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$?
7. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite k , dla których liczba $\frac{k+5}{k+3}$ jest liczbą całkowitą.
8. Jeżeli podzielimy liczbę 100 przez liczbę naturalną a , to otrzymamy liczbę b i resztę 6. Wyznaczyć liczby a i b .
9. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, których suma cyfr przy dzieleniu przez 45 daje resztę 3?
10. Rozważamy wszystkie liczby naturalne od 1 do 2022. Wybieramy po dwie liczby i obliczamy ich iloczyn. Których par jest więcej, tych dla których iloczyn jest liczbą parzystą, czy tych dla których iloczyn jest liczbą nieparzystą?
11. W równoległoboku $ABCD$ na przekątnej AC obrano punkt K . Udowodnić, że pola trójkątów ABK i ADK są równe.
12. Na stole znajdują się 2022 krążki. Na każdym krążku napisana jest liczba 1 lub -1 . Czy można podzielić krążki na dwa zbiory tak, aby sumy liczb napisanych na krążkach każdego zbioru były takie same?
13. Wykazać, że z 11 dowolnych liczb naturalnych można wybrać dwie takie liczby, by ich różnica była podzielna przez 10.
14. Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego wynosi 30600. Ile przekątnych ma ten wielokąt?
15. Udowodnić, że jeżeli środkowa trójkąta jest równa połowie boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt jest prostokątny.
16. W trójkącie ABC dwusieczne kątów BAC i CBA przecinają się w punkcie leżącym na odcinku MN równoległym do boku AB , przy czym punkt M leży na boku AC , a punkt N na boku BC . Udowodnić, że $MN = AM + NB$.

17. Uczniowie A i B grają w następującą grę. Na prostej mamy a) 2022, b) 2023 minusy. Uczniowie na zmianę zamieniają minusy na plusy, przy czym w jednym podejściu uczeń może zmienić jeden minus bądź dwa sąsiednie minusy. Gra się kończy, gdy wszystkie minusy zostaną zamienione na plusy. Wygrywa ten z graczy, który swoim ruchem zamienia ostatnie minusy. Który z graczy ma strategię wygrywającą w przypadku a), a który w przypadku b)?
18. Na stole mamy 15 pionków. Dwaj gracz na zmianę usuwają pionki ze stołu. W jednym ruchu gracz może usunąć ze stołu 1 lub 2 lub 3 pionki. Przegrywa ten kto bierze ostatni pionek. Czy gracz zaczynający może wygrać?
19. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z samych jedynek i która jest podzielna przez liczbę, której zapis składa się ze stu trójek.
20. * W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CH , gdzie C jest wierzchołkiem kąta prostego. Udowodnić, że suma promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC , CAH i CBH jest równa długości CH .
21. Wyznaczyć wszystkie liczby postaci $\overline{32x35717y}$, które są podzielne przez 72.
22. Obliczyć sumę $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$, jeśli wiadomo, że $xyz = 1$.
23. Wyznaczyć wszystkie liczby trzycyfrowe, które są większe 12 razy od sumy swoich cyfr.
24. W zawodach olimpiady matematycznej dziesięciu uczestników rozwiązało łącznie 35 zadań. Wśród nich jeden uczestnik rozwiązał tylko jedno zadanie, jeden uczestnik rozwiązał tylko 2 zadania oraz jeden uczestnik rozwiązał tylko 3 zadania. Udowodnić, że w tej dziesiątce jest uczestnik, który rozwiązał co najmniej 5 zadań.
25. Uzasadnić, że pole trójkąta leżącego wewnątrz prostokąta $ABCD$ jest nie większe od połowy pola tego prostokąta.
26. W kwadracie o boku długości 1 cm obrano 9 punktów takich, że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Udowodnić, że można spośród nich wybrać trzy punkty takie, że pole trójkąta o wierzchołkach w tych wybranych punktach nie przekracza $\frac{1}{8}$ cm².
27. Na tablicy napisanych jest 101 jedynek i 101 minus jedynek. Prowadzimy następujące postępowanie: bierzemy dwie liczby i ścieramy je a na ich miejsce wpisujemy ich iloczyn. Proces ten kontynuujemy tak długo aż na tablicy zostanie jedna liczba. Jaka?
28. Czy którakolwiek z liczb postaci 11, 111, 1111, 11111, ... może być kwadratem liczby naturalnej?
29. Na tablicy napisano liczby: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 2021, 2022. Wybieramy dwie liczby spośród zapisanych na tablicy i ścieramy je, a na tablicy wpisujemy sumę lub różnicę tych startych liczb. Postępujemy w ten sposób tak długo, aż na tablicy zostanie jedna liczba. Czy tą liczbą może być zero?

Życzymy udanych wakacji!

Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej w roku szkolnym 2022/2023!