

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie
Prezent wakacyjny 2024 r.

1. Które spośród następujących liczb są liczbami pierwszymi:
 - (a) $43; 473, 4773; 47773; 477773; \dots, 4 \underbrace{77 \dots 7}_{2024} 3$.
 - (b) $23; 253, 2553; 25553; 255553; \dots, 2 \underbrace{55 \dots 5}_{2024} 3$.
 - (c) $101; 10101; 1010101; 101010101; 10101010101, \text{ itd.}$?
2. Rozstrzygnąć, która z liczb: 22^{55} czy 55^{22} jest większa.
3. Uzasadnić, że każda z liczb: $121; 11211; 1112111; 111121111; \dots$ jest liczbą złożoną. Czy można sformułować na podstawie powyższych przykładów ogólniejsze prawo?
4. Oblicz: $2023 \cdot 202420242024 - 2024 \cdot 202320232023$.
5. Liczby naturalne p i q są kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnić, że liczba $p + q$ jest iloczynem co najmniej trzech liczb naturalnych (niekoniecznie różnych) większych od 1.
6. W jednym wierszu umieszczamy zapis dziesiętny liczby 2^{2024} , następnie tuż za nim umieszczamy zapis dziesiętny liczby 5^{2024} . Z ilu cyfr łącznie składają się te dwa zapisy?
7. Udowodnij, że jeżeli $p > 3$ i liczby p oraz $10p + 1$ są liczbami pierwszymi, to liczba $5p + 1$ nie jest liczbą pierwszą.
8. Oblicz następujące sumy:
 - (a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2024 + 2025$
 - (b) $1 + 5 + 10 + 15 + \dots + 995 + 1000$
 - (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{210} + \frac{1}{240}$
 - (d) $1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10} + 2^{11}$
 - (e) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{2024}$
9. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, q, r takie, że $pqr = 5(p + q + r)$.
10. Rozstrzygnąć, która z liczb $\sqrt{2022} + \sqrt{2024}$, czy $2\sqrt{2023}$ jest większa.
11. Wykaż, że liczba $2^{10} + 5^{12}$ jest złożona.
12. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n taką, aby liczby $n + 1$ oraz $n - 110$ były kwadratami liczb naturalnych.
13. Wykaż, że w trójkącie o bokach a, b, c i odpowiednio wysokościach h_a, h_b, h_c zachodzi równość
$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = (h_a + h_b + h_c) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right).$$
14. Na boku CD kwadratu $ABCD$ obrano punkt K . Dwusieczna kąta BAK przecina bok BC w punkcie L . Udowodnić, że $|BL| + |KD| = |AK|$.
15. Trójkąt KLM zawarty jest w równoległoboku $ABCD$. Udowodnić, że pole trójkąta KLM nie przekracza połowy pola równoległoboku $ABCD$.
16. Dany jest kwadrat o boku długości 1 oraz dziewięć punktów wewnątrz tego kwadratu. Wykaż, że spośród tych dziewięciu punktów zawsze można wybrać trzy takie, że pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach jest mniejsze od $\frac{1}{8}$.

17. Czy można kwadrat podzielić na 2024 kwadraty (nie muszą one być identyczne)? Jeśli tak, to opisz co najmniej dwa takie podziały.
18. W trapezie $ABCD$ punkt M jest środkiem podstawy AB , a punkt N jest środkiem podstawy CD , przy czym $|MN| = \frac{1}{2} \cdot (|AB| - |CD|)$. Udowodnić, że suma miar kątów BAD i ABC jest równa 90° .
19. Wykaż, że jeśli w trójkącie długości dwóch wysokości są nie mniejsze od długości boków, na które są opuszczone, to trójkąt ten jest prostokątny i równoramienny.
20. Udowodnij, że w kole o promieniu 1 nie można znaleźć więcej niż 5 punktów tak, aby odległość pomiędzy dowolnymi dwoma spośród nich była większa od 1.
21. Dwaj przyjaciele grają w następującą grę. Na stole jest 99 małych klocków. Gracze na przemian zdejmują ze stołu po kilka klocków. W jednym ruchu grający musi wziąć co najmniej jeden klocek ale nie więcej niż sześć klocków. Gra trwa tak długo, aż wszystkie klocki zostaną zdjęte ze stołu. Wygrywa ten z graczy, który usunie ostatnie klocki. Który z graczy ma strategię wygrywającą – zaczynając grę czy jego przeciwnik?
22. Dwaj koledzy grają w następującą grę. Każdy z nich kolejno na przemian, umieszcza na blacie niedużego, okrągłego stołu pięciozłotową monetę, przy czym położona moneta pozostaje na stole do końca gry. Ponadto monety nie mogą na siebie zachodzić, mogą co najwyżej się stykać. Gra kończy się w momencie, gdy jeden z graczy nie może umieścić na stole kolejnej monety – brak jest dla niej miejsca aby wykonać prawidłowo kolejny ruch. Gracz, który nie może wykonać prawidłowo kolejnego ruchu przegrywa grę. Czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą?
23. Dwaj uczniowie w ramach nauki mnożenia liczb i elementów logicznego myślenia wypisują na tablicy kolejno i na przemian po jednej liczbie naturalnej zgodnie z następującymi zasadami. Rozpoczynający wpisuje na tablicy liczbę 2. W każdym następnym ruchu gracz wpisuje na tablicy liczbę naturalną większą od liczby napisanej w poprzednim ruchu przez swojego rywala i jednocześnie mniejszą od dwukrotności liczby zapisanej przez poprzednika. Zatem w drugim ruchu rywal rozpoczynającego gracza pisze liczbę 3. W kolejnym ruchu gracz rozpoczynający pisze jedną z liczb 4 lub 5. Gra się kończy w momencie, gdy jeden z graczy napisze liczbę 2024. Czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą?
24. Dane są 2024 zdania wypisane na tablicy. Zdanie o numerze k brzmi następująco: „na tej tablicy jest dokładnie k zdań fałszywych”. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.
25. Na tablicy napisano n liczb dodatnich, przy czym każda z tych liczb jest równa połowie sumy wszystkich pozostałych liczb. Uzasadnij, że $n = 3$.
26. W każde pole szachownicy o wymiarach 8×8 wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie w każdym wierszu dodajemy wszystkie liczby stojące w tym wierszu. To samo czynimy z każdą kolumną i na dwóch głównych przekątnych. Udowodnić, że wśród otrzymanych 18 sum co najmniej dwie są równe.
27. Na każdej krawędzi ośmiościanu foremego wpisujemy jedną z liczb: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, przy czym na różnych krawędziach umieszczamy różne liczby. Czy można rozmieszczenie to zrobić tak, by dla każdej ściany suma liczb umieszczonych na krawędziach leżących w tej ścianie była taka sama?
28. W pewnej grupie dziewcząt i chłopców każda dziewczynka zna n chłopców i każdy chłopiec zna n dziewczynek. Udowodnić, że w tej grupie jest taka sama liczba dziewczynek i chłopców.
29. Wszystkie liczby ze zbioru: $\{1, 2, 3, \dots, 2024, 2025\}$ ustawiono w pewnej kolejności w ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ i utworzono iloczyn $(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot \dots \cdot (a_{2025} - 2025)$. Rozstrzygnąć, czy wartość tego iloczynu jest liczbą parzystą czy nieparzystą.
30. W kwadracie $ABCD$ umieszczono 5 punktów. Udowodnij, że odległość pomiędzy pewnymi dwoma z nich nie przekracza połowy długości przekątnej tego kwadratu.

Życzymy udanych wakacji!