

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki

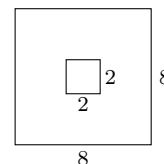
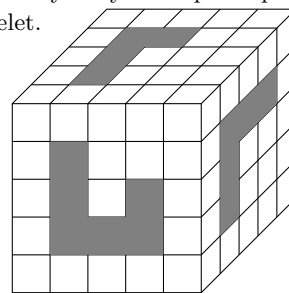
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej

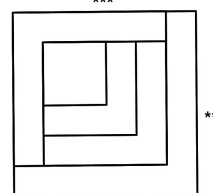
Zadania przygotowawcze na I spotkanie etapu rejonowego w dniu 18 listopada 2023 roku

- Tematyka:**
1. Działania na liczbach wymiernych.
 2. Podzielność liczb naturalnych i całkowitych.
 3. Zadania tekstowe – proste równania i proste obliczenia procentowe.
 4. Graniastopy.

1. Oblicz $\left(\frac{3,2}{1,4 - 0,6 : 2\frac{1}{7}} - 10 \right) \cdot \left[\frac{0,32}{0,2} - \left(\left(3\frac{3}{5} \right)^2 - (-2,4)^2 \right) \right]$.
2. Oblicz sumę 2022 cyfr występujących bezpośrednio po przecinku w zapisie rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{56}{185}$.
3. Rozważamy liczbę $m = 80 \cdot 84 \cdot 88 \cdot 92 \cdot 96$. Czy liczba m jest podzielna a) przez 99? b) przez 333? Odpowiedź uzasadnij.
4. Do końca egzaminu, trwającego dwie godziny zegarowe, zostało 60% czasu, który upłynął od jego rozpoczęcia. Ile czasu zostało jeszcze do końca egzaminu?
5. Dwa identyczne atlasy botaniczne kosztowały tyle samo, co pięć identycznych słowników języka polskiego. Łączny koszt jednego atlasu i jednego słownika wynosił 210 zł. Atlas potaniał o 9%, a słownik podrożał o 19%. Jak zmienił się łączny koszt obu książek, wzrósł, czy zmalał? O ile procent zmienił się ten łączny koszt w stosunku do kosztu pierwotnego?
6. Rozważamy graniastopy prawidłowe **trójkątne**, których wszystkie krawędzie mają długości wyrażające się przez liczby całkowite. Pole powierzchni bocznej pewnego takiego graniastopu jest równe 30. Jakie są możliwe długości jego krawędzi? Podaj wszystkie możliwości. Który z opisanych wyżej graniastopów, o polu powierzchni bocznej równej 30, ma najmniejszą sumę wszystkich swoich krawędzi?
7. Porównaj ułamki: a) $\frac{2277}{3366}$ i $\frac{2727}{3636}$; b) $\frac{222444}{666888}$ i $\frac{242424}{686868}$.
8. W graniastopie prawidłowym sześciokątnym połączono odcinkami wszystkie pary wierzchołków. Odcinki, które zawierają się w którejś podstawie lub ścianie bocznej, są niebieskie. Odcinki, które nie zawierają się ani w żadnej podstawie, ani w żadnej ścianie bocznej, są czerwone. Ile jest odcinków czerwonych, a ile niebieskich?
9. Rozważamy różne prostopadłościany o objętości 72 jednostek sześciennych i takie, których wszystkie krawędzie mają długości wyrażające się przez liczby całkowite jednostek. Mamy do dyspozycji drut długości 60 jednostek. Podaj wymiary wszystkich prostopadłościanów o podanych własnościach i takich, dla których wystarczy drutu, by wykonać z niego ich szkielet.
10. Natalia, robiąc zakupy, zauważyła, że najpierw za owoce zapłaciła 30% sumy, którą dała jej mama, a potem wydała na książkę 60% kwoty, która jej pozostała po kupieniu owoców. Na koniec, gdy za czekoladę zapłaciła połowę reszty pieniędzy, zostało jej 5,60 zł. Ile pieniędzy Natalia dostała od mamy?
11. W sześciennym klocku o krawędziach długości 5, sklejonym z identycznych sześcienników o krawędziach długości 1, wydrążono „tunele” prostopadłe do ścian. Kształty przekrojów „tuneli” widoczne są na rysunku. Ile kostek jednostkowych wyjęto?
12. Wyraż liczbę $0,(6) - 0,(378)$ przez ułamek zwykły nieskracalny, a następnie podaj nieskończone rozwinięcie okresowe tego ułamka.
13. Rozważamy wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe, w których zapisie pojawiają się tylko cyfry 4, 7 i 8. Wśród nich znajdują się także liczby zapisane tylko przy pomocy jednej z podanych cyfr oraz liczby utworzone przy pomocy dokładnie dwóch cyfr z trzech podanych. Ile jest liczb podzielnych przez 36 wśród wszystkich utworzonych w ten sposób liczb czterocyfrowych? Wypisz te liczby.
14. Do górnej podstawy klocka prostopadłościennego o wymiarach $8 \times 8 \times 20$ doklejono klocek prostopadłościenny o wymiarach $2 \times 2 \times 8$ w ten sposób, że klocki wyglądają z góry tak, jak to przedstawia rysunek.
a) Oblicz pola powierzchni całkowitych obu figur przestrzennych: dużego prostopadłościennego klocka oraz figury sklejonej z dwóch klocków.
O ile procent pole powierzchni całkowitej nowo utworzonej bryły jest większe od pola powierzchni całkowitej większego z tych prostopadłościanów?
15. Wyróżnionymi punktami sześcianu są środki wszystkich jego krawędzi. Połączono odcinkami wszystkie możliwe pary wyróżnionych punktów. Ile z tych odcinków nie zawiera się w żadnej ścianie sześcianu?
16. Cenę pewnego towaru zwiększono najpierw o 8%, potem tę nową cenę podwyższono o 30 zł, a po jakimś czasie tę ostatnią cenę obniżono o 20%. Cena końcowa wyniosła 240 zł. Ile kosztował towar na początku? O ile procent cena końcowa była niższa od ceny początkowej?
17. Cenę pewnego towaru podwyższono w okresie świątecznym o 10%, a później dwukrotnie obniżono, najpierw o 10%, a potem jeszcze o 20%. Po wszystkich zmianach towar kosztował 990 zł. Oblicz początkową cenę towaru. Jaki procent najwyższej ceny towaru stanowi cena końcowa?
18. Wyróżnionymi punktami graniastopu prawidłowego pięciokątnego są wszystkie jego wierzchołki oraz środki wszystkich jego krawędzi bocznych. Połączono odcinkami wszystkie możliwe pary wyróżnionych punktów. Ile jest odcinków, które nie zawierają się w żadnej ścianie tego graniastopu?



19. Rozważamy wszystkie możliwe prostopadłościany o objętości 36 cm^3 , których krawędzie mają długości wyrażone przez całkowite liczby centymetrów.
- a) Ile jest wśród nich prostopadłościanów o istotnie różniących się wymiarach? Podaj ich wymiary. (Nie różnią się istotnie dwa prostopadłościany o wymiarach z tylko przestawioną kolejnością, np. $5 \times 4 \times 9$ i $5 \times 9 \times 4$.)
- b) Czy wśród nich istnieje para prostopadłościanów o tej własności, że pole powierzchni całkowitej jednego z nich jest co najmniej dwukrotnie większe od pola powierzchni całkowitej drugiego?
20. Komplet kartonowych pudełek składa się z pięciu różnych sześciennych pudełek o krawędziach długości: 10cm, 15cm, 20cm, 25cm i 30cm. Jaś ze wszystkich pudełek jednego kompletu zbudował wieżę, która z góry wyglądała tak, jak przedstawia rysunek obok. Przedstaw na jednym rysunku, jak wyglądała wieża oglądana od strony oznaczonej symbolem **, oraz na drugim rysunku jej wygląd od strony oznaczonej symbolem ***. Oblicz łączne pole tych części powierzchni wieży, które miały styczność z otwartą przestrzenią.
21. Każdą z podanych liczb wymiernych, zapisanych przy pomocy nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego, zapisz w postaci ułamka zwykłego: a) $0,7(3)$; b) $0,(134)$; c) $0,222(13)$; d) $0,(2002)$; e) $0,23(114)$.
22. Oblicz:



a)
$$\frac{2 - \frac{13}{17} : \left(1\frac{3}{17} - 0,024 : 0,03\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{0,8} : \frac{1}{0,6}}$$

b)
$$\frac{4,45 + 0,55 : \left(1\frac{2}{9}\right)}{\frac{2}{0,5 - 0,1(6)} + [(3,1)^2 - (2,1)^2] : 1,3} : 0,07$$

c)
$$\frac{(5,8 - 2,8 : 0,35) : (-0,2)^2}{2\frac{1}{3} - \frac{1}{1,8} \cdot 0,4} \cdot 0,3(45)$$

d)
$$8\frac{1}{7} : \left[\frac{-\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{7}}{-\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{8}} - \frac{8\frac{1}{8} + 6\frac{7}{8} \cdot 0,2}{7\frac{1}{7} + \frac{6}{7} : 0,(36)} \right]$$

e)
$$\frac{(6,75 - 4,5 \cdot 1\frac{2}{3}) \cdot 0,(6)}{\left[6\frac{2}{3} \cdot 0,15 - \left(0,25 - \frac{11}{12}\right)\right] : 2\frac{2}{3}}$$

f)
$$\frac{\left((0,6)^2 + \frac{\frac{3}{9} \cdot 2,2}{0,9 - \frac{2}{5}}\right) \cdot 0,(2013)}{1,6 - \frac{1,4 + \frac{4}{5}}{2}} - (1 - 0,08 : 0,101).$$

23. Oblicz:

a)
$$\frac{142 \cdot 312 + 284 \cdot 44}{160 \cdot 30 - 16 \cdot 150}$$

b)
$$\frac{685 \cdot 654654}{327 \cdot 137137 + 137 \cdot 327327}$$

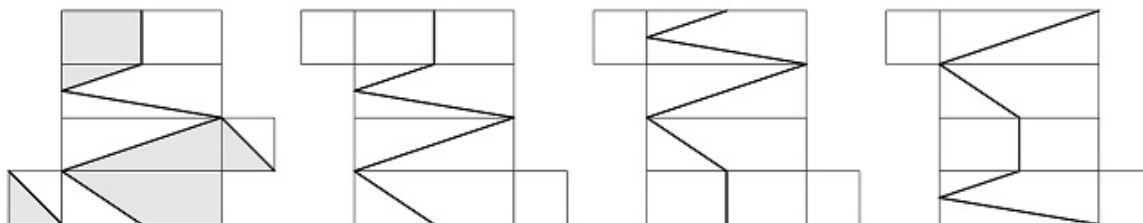
c)
$$\frac{(9191)^2 - 4 \cdot 6363 \cdot 2828}{2525 \cdot 4949}$$

d)
$$\frac{20 \cdot 151515 + 202020 \cdot 15}{65 \cdot 313131 + 656565 \cdot 31} \cdot 2015$$

e)
$$\frac{81 \cdot 3636}{6363 \cdot 864 - 5454 \cdot 468}$$

f)
$$\frac{11 \cdot 9494 \cdot 11}{3344 \cdot 55 + 4455 \cdot 33 + 5533 \cdot 44}$$

24. Czy liczba $666 \dots 6$, w której cyfra 6 powtarza się 2020 razy jest kwadratem liczby naturalnej?
25. Uzasadnij, że żadna liczba naturalna posiadająca w swym zapisie dokładnie trzy zera na końcu nie jest kwadratem liczby naturalnej.
26. Siatkę prostopadłościanu o podstawie kwadratowej pomalowano dwoma kolorami, jak na rysunku. Na innych siatkach tego samego prostopadłościanu dorysuj brakujące odcinki i odpowiednio pokoloruj ściany.



27. Wskaż wszystkie pary cyfr x, y o tej własności, że po wstawieniu ich do zapisu liczby naturalnej $\overline{42x314y}$ otrzymamy liczbę podzielną przez 5, (4, 6, 8, 12, 15, 30, ...).
28. Rozważamy liczbę $a = 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 30$.
- a) Ilość zerami kończy się zapis dziesiętny tej liczby?
- b) Czy liczba a dzieli się przez 15, 21, 33, 56, 63, 63, 81, 126, 250?
- c) Przez jaką najwyższą potęgę liczby 2 dzieli się liczba a ?
29. Czy liczba $b = 231 \cdot 132 + 891 \cdot 198$ jest podzielna przez 6, 10, 11, 12, 33, 44, 63, 121, 125?
30. Ile trzycyfrowych bloków liczb 254 trzeba zapisać obok siebie, by ich łączny zapis utworzył liczbę podzielną przez 33?
31. Uzasadnij, że liczba $2021 \cdot (2019 \cdot 2023 + 4)$ jest sześcianem pewnej liczby naturalnej.

Uwaga I W przygotowaniach do I spotkania drugiego etapu można wykorzystać zbiory zadań: *Liga Zadaniowa*, str. 15-16 (zad. 8-102), str. 25-29 (zad. 1-12, 14-51); *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, str. 11-13 (zad. 14-18); str. 42-45 (zad. 195-227), str. 46-48 (zad. 228-253); str. 54-56 (zad. 316-357); str. 29-31 (zad. 104, 105, 107, 110, 115-119) *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, str. 121-131, 173-174; *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Liczby, Podzielność liczb, Procenty.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki: *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zadania: 31, 126, 143, 209, 222, 232, 234, 254, 271, 288, 591.

Uwaga II: W soboty, począwszy od 14 października, o godzinie 10:30 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywać się będą zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej <https://liga.mat.umk.pl/> Serdecznie zapraszamy.